



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

- Problema 1.** a) Arătați că numărul $a = \sqrt{9 - \sqrt{77}} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{7}) \cdot (9 + \sqrt{77})$ este natural.
b) Se consideră numerele reale x și y astfel încât $xy = 6$. Dacă $x > 2$ și $y > 2$, arătați că $x + y < 5$.

Gazeta Matematică

Soluție

- a) Numărul a se poate rescrie $\sqrt{18 - 2\sqrt{77}} \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{7}) \cdot (9 + \sqrt{77})$ **1p**
 $18 - 2\sqrt{77} = (\sqrt{11} - \sqrt{7})^2$ **2p**
 Ca urmare, $a = (\sqrt{11} - \sqrt{7})^2 \cdot (9 + \sqrt{77}) = (18 - 2\sqrt{77})(9 + \sqrt{77}) = 8 \in \mathbb{N}$ **1p**
 b) Dacă $x > 2$, $y > 2$, atunci $(x - 2)(y - 2) > 0$ **2p**
 Rezultă $xy - 2(x + y) + 4 > 0$, de unde $x + y < \frac{1}{2}(xy + 4) = 5$ **1p**

- Problema 2.** a) Arătați că dacă există două numere naturale p și q astfel încât $\sqrt{2p - q}$ și $\sqrt{2p + q}$ sunt numere naturale, atunci q este par.

- b) Determinați câte numere naturale p au proprietatea că $\sqrt{2p - 4030}$ și $\sqrt{2p + 4030}$ sunt simultan numere naturale.

Soluție

- a) Din ipoteză, există numerele naturale k și r astfel încât $2p - q = k^2$, $2p + q = r^2$; atunci $r^2 - k^2 = 2q$ **1p**
 Atunci $(r - k)(r + k) = 2q$, iar concluzia se obține din faptul că $r - k$ și $r + k$ au aceeași paritate **2p**
 b) Notând ca mai sus, avem $(r - k)(r + k) = 2 \cdot 4030 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$ **1p**
 Cum $r - k$ și $r + k$ au aceeași paritate, iar $r - k < r + k$, perechea $(r - k, r + k)$ poate fi $(2, 4030)$, $(10, 806)$, $(26, 310)$ sau $(62, 130)$.
 Se obține $r \in \{2016, 408, 168, 96\}$, iar $p \in \{2030113, 81217, 12097, 2593\}$, deci există 4 numere cu proprietatea din enunț **3p**

- Problema 3.** În triunghiul ABC , fie M mijlocul laturii $[AC]$ și punctul $N \in (AM)$. Paralela prin N la AB intersectează dreapta BM în P , paralela prin M la BC intersectează dreapta BN în Q , iar paralela prin N la AQ intersectează dreapta BC în S .

Demonstrați că dreptele PS și AC sunt paralele.

Soluție

- Notând $MQ \cap AB = \{E\}$ și $\{D\} = NP \cap ME$, obținem $EA = EB$ și $ND = DP$ **2p**
 Cum $ANPB$ este trapez, punctele A, Q, P sunt coliniare **2p**
 $\triangle ADP \equiv \triangle SDN$ (U.L.U.) **1p**
 Rezultă $[AP] \equiv [SN]$ și, cum $AP \parallel SN$, patrulaterul $ANSP$ este paralelogram, deci $PS \parallel AC$ **2p**

- Problema 4.** În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiește triunghiul isoscel ABE , cu $m(\angle ABE) = 120^\circ$. Se notează cu M piciorul perpendicularei din B pe bisectoarea unghiului EAB , cu N piciorul perpendicularei din M pe AB , iar cu P intersecția dreptelor CN și MB .

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABE . Demonstrați că dreptele PG și AE sunt paralele.

Soluție

- $m(\angle BAM) = 15^\circ$ implică $MN = \frac{1}{4}AB$ **2p**

Din $MN \parallel BC$ rezultă $\triangle PMN \sim \triangle PBC$, deci $\frac{PM}{PB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{4}$ și, notând $\{Q\} = BM \cap AE$, rezultă $\frac{PM}{BQ} = \frac{1}{6}$,
 de unde $PB = PM + \frac{1}{2}BQ = \frac{2}{3}BQ$ **3p**

Dacă F este mijlocul segmentului $[AE]$, atunci $\frac{BG}{BF} = \frac{2}{3}$ și, conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că
 $PG \parallel AE$ **2p**