

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Județeană și a Municipiului București, 14 Martie 2015

CLASA a XI-a
Soluții și bareme

Problema 1. Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o funcție cu proprietatea că pentru oricare $y \in [0, 1]$ și oricare $\varepsilon > 0$ există $x \in [0, 1]$ astfel încât $|f(x) - y| < \varepsilon$.
a) Demonstrați că dacă f este continuă pe $[0, 1]$ atunci f este surjectivă.
b) Dați un exemplu de funcție f cu proprietatea din enunț, care să nu fie surjectivă.

Soluție.

a) Considerăm o funcție continuă $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ având proprietatea din enunț. Fie $y \in [0, 1]$. Din ipoteză deducem că există un șir $(x_n)_{n \geq 1}$, cu termenii în $[0, 1]$, astfel încât $|f(x_n) - y| < 1/n$, $\forall n \geq 1$. (**2 puncte**)

Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit, deci admite un subșir convergent $(x_{i_n})_{n \geq 1}$, cu $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n} \in [0, 1]$. (**1 punct**)

Prin trecere la limită în inegalitatea $|f(x_{i_n}) - y| < 1/i_n$, $\forall n \geq 1$, obținem (pe baza continuității lui f în punctul x) $|f(x) - y| \leq 0$, deci $f(x) = y$. Rezultă că f este surjectivă. (**1 punct**)

b) Definim funcția $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (\mathbf{2 \text{ puncte}})$$

$f([0, 1]) = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, deci f nu este surjectivă.

Avem $|f(y) - y| = 0$, $\forall y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Pentru $y \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ și $\varepsilon > 0$, există $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ astfel ca $|x - y| < \varepsilon$, sau $|f(x) - y| < \varepsilon$. (**1 punct**)

Problema 2. Fie două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $(A - B)^2 = O_2$.
a) Arătați că $\det(A^2 - B^2) = (\det(A) - \det(B))^2$.
b) Demonstrați că $\det(AB - BA) = 0$ dacă și numai dacă $\det(A) = \det(B)$.

Soluție.

a) Din $(A - B)^2 = O_2$ obținem $\det(A - B) = 0$. (**1 punct**)

De asemenea, deducem $\text{Tr}(A - B) = 0$, deci $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) =: a$. (**1 punct**)

Notăm $b = \det(A) - \det(B)$. Conform relației lui Cayley, avem

$$\begin{cases} A^2 - aA + \det(A)I_2 = O_2 \\ B^2 - aB + \det(B)I_2 = O_2 \end{cases} \quad ,$$

de unde $\det(A^2 - B^2) = \det(a(A - B) - bI_2)$. (**1 punct**)

Dar $\det(a(A - B) - bI_2) = a^2 \det(A - B) - ab \text{Tr}(A - B) + b^2 = b^2$.

Rezultă $\det(A^2 - B^2) = (\det(A) - \det(B))^2$. (**1 punct**)

b) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = \det(A^2 - B^2 + x(AB - BA)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funcția f se poate reprezenta sub forma

$$f(x) = \det(A^2 - B^2) + cx + \det(AB - BA)x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

unde c este o constantă reală. **(1 punct)**

Din $f(1) = f(-1) = \det(A - B) \det(A + B) = 0$ obținem $c = 0$ și

$$\det(A^2 - B^2) + \det(AB - BA) = 0. \quad \textbf{(1 punct)}$$

Atunci, conform a), $(\det(A) - \det(B))^2 = -\det(AB - BA)$, de unde concluzia. **(1 punct)**

Problema 3. Determinați toate numerele naturale $k \geq 1$ și $n \geq 2$ cu proprietatea că există $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^3 = O_n$ și $A^k B + BA = I_n$.

Soluție. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^3 = O_n$ și $A^k B + BA = I_n$.

Dacă $k \geq 3$, atunci $BA = I_n$ (deoarece $A^k = O_n$), deci A este inversabilă, în contradicție cu $A^3 = O_n$. **(1 punct)**

Dacă $k = 2$ atunci din $A^2 B + BA = I_n$, prin înmulțire la stânga cu A și apoi la dreapta cu A^2 , rezultă $ABA = A$ și $A^2 B A^2 = A^2$. Scriind ultima egalitate sub forma $A(ABA)A = A^2$, obținem $A^3 = A^2$, deci $A^2 = O_n$. Atunci $BA = I_n$, în contradicție cu $A^3 = O_n$. **(1 punct)**

Prin urmare, dacă există k și n ca în enunț, atunci $k = 1$. Din $Tr(AB) = Tr(BA) \in \mathbb{Z}$ și $AB + BA = I_n$ rezultă $2Tr(AB) = n$, deci n este un număr natural par. **(1 punct)**

Arătăm în continuare că, pentru orice număr natural par $n \geq 2$, există $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^3 = O_n$ și $AB + BA = I_n$.

Pentru $n = 2$, putem alege matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, care satisfac condițiile $AB + BA = I_2$ și $A^2 = B^2 = O_2$. **(2 puncte)**

Pentru $n = 2k$, cu $k \geq 2$, matricele bloc diagonale A și B , de dimensiune $2k$, care au pe diagonala principală k matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și respectiv k matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, iar restul coeficienților nuli, satisfac relațiile $AB + BA = I_n$ și $A^2 = B^2 = O_n$. **(2 puncte)**

Problema 4. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale din intervalul $[1, \infty)$. Presupunem că șirul $(y_n^{(k)})_{n \geq 1}$, definit prin $y_n^{(k)} = [x_n^k]$, $n \geq 1$, este convergent pentru oricare $k \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. (Prin $[a]$ se notează partea întreagă a numărului real a .)

Soluție. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $(y_n^{(k)})_{n \geq 1}$ este un șir convergent de numere naturale nenule. Atunci există $n_k, a_k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $y_n^{(k)} = a_k$, $\forall n \geq n_k$. Ca urmare, $x_n^k \in [a_k, a_k + 1)$, $\forall n \geq n_k$. **(2 puncte)**
În particular, $x_n \in [a_1, a_1 + 1)$, $\forall n \geq n_1$. Rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit. **(1 punct)**

Presupunem, prin reducere la absurd, că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ admite două puncte

limită a și b , cu $1 \leq a < b$. Atunci există două subșiruri $(x_{i_n})_{n \geq 1}$ și $(x_{j_n})_{n \geq 1}$ ale șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n} = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{j_n} = b$.

Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $i_n, j_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avem $x_{i_n}^k, x_{j_n}^k \in [a_k, a_k + 1)$, $\forall n \geq n_k$. Rezultă $x_{j_n}^k - x_{i_n}^k < 1$, $\forall n \geq n_k$. Prin trecere la limită ($n \rightarrow \infty$) obținem $b^k - a^k \leq 1$. Prin urmare, $b^k - a^k \leq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. **(2 puncte)**

Dar $1 \leq a < b$ implică $\lim_{k \rightarrow \infty} (b^k - a^k) = \infty$, în contradicție cu inegalitatea precedentă. În concluzie, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. **(2 puncte)**