Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a XII-a Barem

1.

(i) Integrăm prin părți și obținem $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **2p**

Se efectuează schimbarea de variabilă $\frac{1}{x} = t$ **1p**

Finalizare **1p**

(ii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ **2p**

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$ **1p**

2. **(i)** $H \le \mathbb{Z} \iff \exists n \in \mathbb{N}$ astfel ca $H = n\mathbb{Z}$

$H \le \mathbb{Z} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ astfel ca $H = n\mathbb{Z}$ **3p**

$H = n\mathbb{Z} \Rightarrow H \le \mathbb{Z}$ **1p**

(ii) $\forall x \in \mathbb{Z}_9 \quad f(x) \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{7}\}$ **1p**

Finalizare **2p**

3.

(i) Fie $a,b \in \mathbb{R}$, atunci

$|g(a)-g(b)| = \left|\int_0^1 |x-a|\cdot f(x)\,dx - \int_0^1 |x-b|\cdot f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 (|x-a|-|x-b|)\cdot f(x)\,dx\right| \le \int_0^1 \big||x-b|-|x-b|\big|\cdot|f(x)|\,dx$ **2p**

Fie $L = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$.

Atunci $|g(a)-g(b)| \le L\cdot\int_0^1 \big||x-b|-|x-b|\big|dx \le L\cdot\int_0^1 |a-b|dx = L\cdot|a-b|$ **2p**

(ii) Fie $t \in [0,1]$ și $a,b \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $x \in [0,1]$ are loc

$|x-ta-(1-t)b| = |tx+(1-t)x-ta-(1-t)b| = |t(x-a)+(1-t)(x-b)| \le t|x-a|+(1-t)|x-b|$ **1p**

Cum $f(x) \ge 0, \forall x \in [0,1]$, din inegalitatea de mai sus deducem că

$|x-ta-(1-t)b|f(x) \le t|x-a|f(x)+(1-t)|x-b|f(x), \forall x \in [0,1]$ și concluzia se impune. **2p**

4.

(i) Fie $a,b \in Z(R)$ și $y \in R$, atunci $(a-b)\cdot y = a\cdot y - b\cdot y = y\cdot a - y\cdot b = y\cdot(a-b)$, adică $a-b \in Z(R)$ **1p**

$(a\cdot b)\cdot y = a\cdot(b\cdot y) = a\cdot(y\cdot b) = (a\cdot y)\cdot b = (y\cdot a)\cdot b = y\cdot(a\cdot b) \Rightarrow a\cdot b \in Z(R)$ **2p**

(ii) Fie $x, y \in R$, atunci $x^2 - x, y^2 - y, (x+y)^2 - (x+y) \in Z(R)$, dar
$(x+y)^2 - (x+y) = x^2 - x + y^2 - y + x \cdot y + y \cdot x$
și din (i) obținem $x \cdot y + y \cdot x \in Z(R)$. **1p**
Atunci $x \cdot (x \cdot y + y \cdot x) = (x \cdot y + y \cdot x) \cdot x$, adică $x \cdot y \cdot x + y \cdot x^2 = x^2 \cdot y + x \cdot y \cdot x \Leftrightarrow x^2 \cdot y = y \cdot x^2$. **1p** **1p**
De unde $x^2 \in Z(R)$ și din (i) obținem $x \in Z(R) \Rightarrow x \cdot y = y \cdot x$ **1p**

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro