Olimpiada de matematică
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a XI-a

1.

(i) Din dubla inegalitate $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ **2p**

și aplicând criteriul "cleștelui" deducem că limita este 1. **1p**

Finalizare **1p**

(ii) $x \to \infty \Rightarrow [x] \to \infty$ obținem nedeterminarea 1^∞ **1p**

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{[x]} = 1$ **1p**

Finalizare $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{[x]})^{x+1} = e$. **1p**

2.

(i) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ atunci $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ **1p**

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $A + x \cdot A^t = \begin{pmatrix} a+xa & b+xc \\ c+bx & d+dx \end{pmatrix}$ **1p**

De unde $det\left(A + x\cdot A^t\right) = x^2 \cdot det\ (A)\ +\ x\cdot(2ad - b^2 - c^2) + \det(A)$ **1p**

(ii) Din enunț și **(i)**, avem $det\left(A + A^t\right) = 8 = 2\det(A) + \alpha$ și $det\left(A + 2\cdot A^t\right) = 27 = 5\det(A) + 2\alpha$ **3p**

Finalizare **1p**

3.

(i) Fie $X = \begin{pmatrix} m & n & p \\ q & r & s \\ t & u & v \end{pmatrix} \in C(A)$, atunci din $X\cdot A = A\cdot X$ deducem că $m = r = v = a, n = s = b$ **2p**

$p = c, q = t = u = 0$ **1p**

Reciproc

(ii)

Admitem că există $X \in M_3(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, n \ge 2$, astfel încât ecuația $X^n = A$, atunci $\det(X) = 0,\quad X^{n+1} = A\cdot X = X\cdot A$. **2p**

În consecință există $b,c \in \mathbb{R}$ astfel ca $X = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **1p**

Cum $X^n = O_3$ pentru $n \geq 3$ și $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, concluzia se impune.	1p

4.

(i) Șirul $(h_n)_{n\geq 1}$ definit prin $h_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este strict crescător; **1p**

Dacă $(h_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior atunci el este convergent și atunci $h_{2n} - h_n \to 0$,cum **1p**

$h_{2n} - h_n = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ s-a obținut o contradicție. **1p**

(ii) Dacă $l = \infty$ *sau* $l = -\infty$ alegem $s_n = 1$ *sau* $s_n = -1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Admitem $l \geq 0$. Fie $n_1 \in \mathbb{N}^*$ cel mai mic număr astfel ca $\sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{i} > l$ și alegem

$s_1 = s_2 = ... = s_{n_1} = 1$, iar $n_2 \in \mathbb{N}^*$ cel mai mic număr, $n_2 > n_1$ astfel ca $\sum_{i=1}^{n_1} s_i \frac{1}{i} - \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{1}{i} < l$ și

considerăm $s_{n_1+1} = ... = s_{n_2} = -1$. Procedând în acest fel, având în vedere (i) și că

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ rezultă cerința (ii). Cazul $l < 0$ se deduce din cazul de mai sus. **3p**

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro