Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a X-a

1.

(i) Ecuația este echivalentă cu $\left(2^x+3^x\right)^2=4\cdot 2^x\cdot 3^x$, $n\in\mathbb{N}^*$ **1p**

De unde $2^x=3^x$ și atunci *x=0* **2p**

(ii) Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x+2^x+\log_2 x$

este funcție strict crecătoare. **2p**

f(2)=7 **1p**

Finalizare **1p**

2. **(i)** $\lg a+\lg b\geq \lg(a+b)\Leftrightarrow \lg a\cdot b\geq \lg(a+b)\Leftrightarrow$ **1p**

$a\cdot b\geq a+b\Leftrightarrow (a-1)(b-1)\geq 1$ adevărat **2p**

(ii) Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{\lg a}{\lg(b+c)}+\frac{\lg b}{\lg(c+a)}+\frac{\lg c}{\lg(a+b)}\geq\frac{3}{2}$. **1p**

Din (i) avem $\sum_{ciclic}\frac{\lg a}{\lg(b+c)}\geq\sum_{ciclic}\frac{\lg a}{\lg b+\lg c}$ **2p**

Cum $\sum_{ciclic}\frac{\lg a}{\lg b+\lg c}\geq\frac{3}{2}$ inegalitatea din enunț este dovedită. **1p**

3.

(i) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=ax+b$ **1p**

Atunci găsim $a=-3$ și $b=-3$ sau $a=1$ și $b=1$ **1p**

(ii) Fie $f\in F$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=x+f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Atunci din enunț avem $g(g(x))=4x+3$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. **2p**

Cum ecuația $4x+3=x$ are o unică soluție în $\mathbb{R}$ pe *-1*, deduce că ecuația $g(g(x))=x$ are o unică soluție în $\mathbb{R}$ pe *-1*, ceea ce conduce la unicitatea soluției ecuației $g(x)=x$. **1p**

Finalizare **1p**

4.

(i) Dacă $z_1=z_2$ atunci dacă $|2z_1+z_3|=1$ și din egalitatea

$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$ (identitatea paralelogramului), deducem că $|2z_1-z_3|=3$ și din **2p**

$3=|2z_1-z_3|\leq 2|z_1|+|z_3|=3$ găsim că $2z_1=\alpha\cdot(-z_3)$ cu $\alpha\in\mathbb{R},\alpha\geq 0$, adică $\alpha=2$ și

atunci $z_1+z_3=0$. **2p**

(ii)	În mod cert numerele complexe nu pot fi toate egale. Dacă două sunt egale, atunci din (i) deducem că produsul este 0.	**1p**
	Dacă numerele sunt diferite două câte două, atunci ele pot fi afixele vârfurilor unui triunghi cu $\|h\|=1$, unde h este afixul ortocentrului și atunci ortocentrul se află pe cercul circumscris triunghiului, de unde deducem că triunghiul este dreptunghic și atunci concluzia este evidentă.	**2p**

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro