Olimpiada de matematică
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a IX-a

1.

(i) $x-1=k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}^*$ **1p**

$x-1\le\dfrac{2x-1}{3}<x$ și finalizare **2p**

(ii) Fie $a_n=a_1+(n-1)r$ cu $a_1\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}$

Atunci $6/7+a_1$ și $6/7^{n+1}-7^n+r=6\cdot 7^n+r$ **1p**

Luăm $a_1=5$ și $r=6$ și prin inducție $6/7^n+6n-1, n\in\mathbb{N}^*$. **3p**

2. **(i)** Întrucât $4n+2$ nu este pătrat perfect, atunci $\exists k\in\mathbb{N}^*$ astfel ca

$k^2<4n+2<(k+1)^2$ și $\left[\sqrt{4n+2}\right]=k$ **1p**

de unde $k^2\le 4n+1<(k+1)^2$ **1p**

și în concluzie $\left[\sqrt{4n+1}\right]=k$ **1p**

(ii) $\sqrt{4n+1}\le\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}\quad\forall n\in\mathbb{N}$ **2p**

De unde $\left[\sqrt{4n+1}\right]\le\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]\le\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]\quad\forall n\in\mathbb{N}$. **2p**

3.

(i) Fie $a+c=u$ și $b+d=v$ **1p**

Atunci inegalitatea este echivalentă cu $4uv\le(u+v)^2$ sau $0\le(u-v)^2$, care este adevărată. **1p**

(ii) Din $\sqrt{a}\le\dfrac{a+1}{2}, a\ge 0$ și $x+y+z+t=4$ **1p**

deducem că $x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{t}+t\sqrt{x}\le\dfrac{x+xy+y+yz+z+zt+t+tx}{2}=2+\dfrac{(x+z)(y+t)}{2}$ **2p**

Din (i) și din ultima inegalitate se deduce cerința (ii). **1p**

4.

(i) Din relația lui Sylvester avem $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ și analoagele **2p**

Cum $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ și analoagele obținem că segmentele

$[DH_1],[AH_2],[BH_3],[CH_4]$ au același mijloc. **2p**

(ii) Fie Q mijlocul lui $[MN]$. Atunci $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ **1p**

Dar $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ deci $2\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}$ de unde O,P,Q sunt coliniare **2p**

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro