Olimpiada de matematică
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a VII-a

1.			
	(i)	Se ridică la pătrat $\sqrt{n}+\sqrt{n+3}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\quad \forall n\in\mathbb{N}$.	**1p**
		Finalizare	**2p**
	(ii)	Inegalitatea (i) devine $\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\quad \forall n\in\mathbb{N}$.	**2p**
		Prin însumare obținem $3A<B$	**2p**
2.	(i)	Dacă $x\in\mathbb{N}$ și *3* nu divide pe x, atunci $x=3p\pm1, p\in\mathbb{N}$	**1p**
		$x^2=(3p\pm1)^2=\mathrm{M}_3+1$	**2p**
	(ii)	$u=\sqrt{a^{2014}+b^{2016}+c^{2018}+2}=\sqrt{M_3+2}$	**2p**
		Finalizare	**2p**
3.			
	(i)	Fie ABCD un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare și O punctul de intersecție al diagonalelor. Triunghiurile dreptunghice determinate de diagonale sunt isoscele. Înălțimea dusă prin intersecția diagonalelor formează segmente ce sunt mediane.	***2p***
		Finalizare	**1p**
	(ii)	Reciproc. Fie OP și OR proiecțiile punctului O pe AB, respectiv CD.	**1p**
		Din asemănarea tr. AOB și tr. DOC rezultă $\frac{PR}{OP}=\frac{AB+DC}{AB}$, dar $\frac{AB+DC}{2}=PR$	**1p**
		În tr. AOB isoscel, $OP=\frac{AB}{2}$	**1p**
		Finalizare	**1p**
4.			
	(i)	Fie P mijlocul lui BC. Deoarece MP este linie mijlocie în triunghiul CAB, deducem că $MP=\frac{AB}{2}=\frac{AC}{2}=AM$ şi $MP\parallel BN$.	**1p**
		Cum $BN=AM$ rezultă că $MP=BN$.	
		Deducem MNBP paralelogram, deci O, care este intersecţia diagonalelor BP şi MN, este mijlocul lui $[MN]$.	**1p** **2p**
	(ii)	Deoarece MBNP este paralelogram $OB=OP$ deci $OB=OP=\frac{BP}{2}=\frac{BC}{4}$. Cum	**1p**
		$OC=OP+PC=\frac{BC}{4}+\frac{BC}{2}=\frac{3BC}{4}$, se obţine tocmai condiţia cerută.	**2p**