Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a XII-a

1. Să se calculeze

(i) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$, *pentru* $x \in (0,1)$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

2. **(i)** Să se determine subgrupurile grupului $(\mathbb{Z},+)$.

(ii) Fie $f:\mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_9$ definită prin $f(x)=x^2$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_9$. Să se determine submulțimile $A\subseteq\mathbb{Z}_9$ astfel ca $f(A)=A$.

GM 2014

3. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcția definită prin $g(a)=\int_0^1 |x-a|\cdot f(x)\,dx$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

(i) Să se arate că există $L\geq 0$ astfel ca $|g(a)-g(b)|\leq L\cdot|a-b|$ pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

(ii) Dacă $f(x)\geq 0\ \ \forall x\in[0,1]$, să se arate că funcția g este convexă.

4. Fie $(R,+,\cdot)$ un inel și $Z(R)=\{a\in R: a\cdot y=y\cdot a, \forall y\in R\}$.

(i) Să se arate că $\forall a,b\in Z(R)\Rightarrow a-b, a\cdot b\in Z(R)$;

(ii) Demonstrați că dacă $x^2-x\in Z(R)$ pentru orice $x\in R$, atunci inelul $(R,+,\cdot)$ este comutativ.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.