Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a XI-a

1. Să se calculeze

(i) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{x+1}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui $x\in\mathbb{R}$.

2. Fie *A* o matrice pătratică de ordinul 2 cu elemente reale și A^t matricea transpusă

(i) Arătați că există $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel ca $det\left(A+x\cdot A^t\right)=\left(x^2+1\right)\cdot det\ A+\alpha\cdot x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(ii) Știind că $det\left(A+A^t\right)=8$ și $det\left(A+2\cdot A^t\right)=27$, să se calculeze *det(A).*

GM 2014

3. Fie $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $C(A)=\{X\in M_3(\mathbb{R}):A\cdot X=X\cdot A\}$

(i) Să se arate că $X\in C(A)$ dacă și numai dacă există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel ca $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$.

(ii) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, ecuația $X^n=A$ nu are nicio soluție.

4.

(i) Arătați că $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\infty$;

(ii) Demonstrați că dacă $l\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, atunci există un șir $(s_n)_{n\geq1}$ cu $s_n\in\{-1,1\}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{s_1}{1}+\frac{s_2}{2}+\ldots+\frac{s_n}{n}\right)=l$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.