INSPECTORATUL
ŞCOLAR JUDEŢEAN
HUNEDOARA

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

# Olimpiada de matematică
# Faza locală - 20 februarie 2015

## Clasa a X-a

**1.** Să se rezolve ecuațiile:

**(i)** $\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}=\frac{1}{2^x+3^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

**(ii)** $x+2^x+\log_2 x=7$, $x\in(0,\infty)$.

**2.**

**(i)** Dacă $a,b\geq 2$ arătați că $\lg a+\lg b\geq \lg(a+b)$.

**(ii)** Demonstrați că pentru orice $a,b,c\in[2,\infty)$ are loc inegalitatea $\log_{b+c}a+\log_{c+a}b+\log_{a+b}c\geq\frac{3}{2}$.

**3.** Considerăm $F$ mulțimea funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea: $f(x)+f(x+f(x))=3x+3, (\forall)x\in\mathbb{R}$. Să se arate că:

**(i)** Mulțimea $F$ conține cel puțin o funcție de gradul 1;

**(ii)** Dacă $f\in F$, atunci ecuația $f(x)=0$ are o unică soluție reală.

GM 2014

**4.** Fie $z_1,z_2,z_3$ numere complexe cu proprietatea că $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_1+z_2+z_3|=1$.

**(i)** Să se arate că dacă $z_1=z_2$ *atunci* $z_1+z_3=0$.

**(ii)** Demonstrați că $(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)=0$.

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro