ROMANIA

Liceul Louis-le-Grand, test pentru admiterea in clasa pregătitoare MPSI, sesiunea 2014

Durata testului: 4 ore

Următoarele exerciții pot fi rezolvate în orice ordine. Utilizarea calculatoarelor nu este permisă.

Problema 1. Demonstrați că $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{nt}} dt \to 0$, când n→+∞.

Problema 2. Determinați cel mai mare număr natural k strict pozitiv care, pentru oricare (a,b,c,d) $\in Z^4$, divide (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).

Problema 3. Funcția f definită pe R cu valori in R este periodică dacă ∃T>0 $\forall\ x \in R$ f(x + T)= f(x). Dacă g(x) = cos x + cos(x√2), demonstrați că funcția g nu este periodică.

Problema 4. Fie a un număr real strict pozitiv. Se consideră ecuația(E_a), a cărei necunoscută x aparține intervalului]0, π [.

$$\sin x = \frac{a}{x} \qquad (E_a)$$

a. Arătați că există un număr real λ astfel încât, dacă a> λ, atunci (E_a) nu admite soluții în]0, π [, dacă λ >a>0, atunci (E_a) admite două soluții în]0, π [și (E_λ) admite o soluție unică, notată cu α , in intervalul]0, π [.

b. Exprimați α în funcție de λ.

Problema 5. Găsiți toate tripletele de numere reale (x,y,z) astfel încât $e^{ix} + e^{iy}+e^{iz}=3e^{i(x+y+z)}$.

Problema 6. a. Demonstrați că exista un multiplu al lui 17 a cărui scriere în baza 10(notația zecimală) nu conține decât cifra 1.

b. Fie a un număr întreg pozitiv, a≥2. Găsiți o condiție necesară și suficientă pentru a astfel încât să existe un multiplu a lui a a cărui notație în baza 10 să nu conțină decât cifra 1.

Problema 7. Fie triunghiul $A_1A_2A_3$. Pe fiecare latură, se construiește câte un triunghi echilateral către exteriorul triunghiului $A_1A_2A_3$. Demonstrați că celor trei centre de greutate ale triunghiurilor echilaterale coincide cu centrul de greutate al triunghiului $A_1A_2A_3$.

Problema 8. Fie (u_n) un șir de elemente reale astfel încât, oricare ar fi n,

$$u_{n+4}+u_{n+3}+u_{n+2}+u_{n+1}+u_n=2^{-n}.$$

Găsiți o condiție necesară și suficientă pentru (u_0, u_1, u_2, u_3) astfel încât $u_n \to 0$.

Problema 9. Fie $n\epsilon N^*$, n≥10, a cărui scriere zecimală nu conține decât cifra $a\epsilon\{1, 2,..,9\}$, adică $n=\overline{aa\ldots a}$. Demonstrați că n nu este pătratul unui intreg.

Problema 10. Se consideră două zaruri cu câte șase fețe(non echilibrate) pe care le aruncăm in mod independent. Presupunem ca probabilitatea de a obține o sumă egală cu 2 și cea de a obține o sumă egală cu 12 sunt egale ambele cu $\frac{1}{11}$. Demonstrați că probabilitatea de a obține o sumă egală cu 7 este mai mare sau egală cu $\frac{2}{11}$.

Problema 11. Se consideră triunghiurile ale căror laturi au lungimi întregi și care admit un unghi de $\frac{2\pi}{3}$. Notăm cu p perimetrul unui astfel de triunghi. Care este valoarea minimă a lui p?

Problema 12. Fie x_1. Definim prin recurență șirul $(x_n)_{n\geq1}$,cu $x_{n+1}= x_n(x_n + \frac{1}{n})$ pentru n≥1. Demonstrați că există x_1 ,real si unic, astfel încât

$$\forall n\geq1 \ \ 0<x_n<x_{n+1}<1.$$

Sfârșitul probei