Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil servicii, tehnologic, ştiinţe ale naturii
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a IX-a

1. **a)** Se consideră numerele a,b,c,d pozitive, aflate în această ordine în progresie geometrică. Să se arate că $a+d\geq b+c$;

b) Se consideră numerele a,b,c,d pozitive, aflate în această ordine în progresie aritmetică. Să se arate că $\sqrt{a}+\sqrt{d}\leq\sqrt{b}+\sqrt{c}$;

2. Într-o clasă cu 30 elevi, 17 elevi cunosc limba franceză, iar 19 elevi cunosc limba germană.

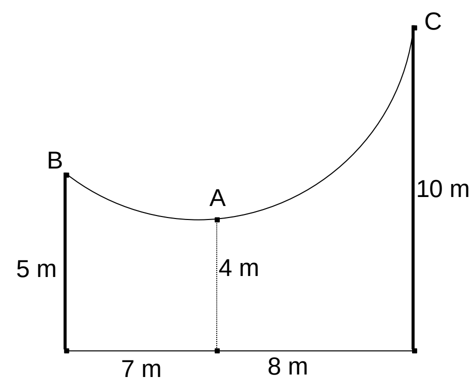
a) Să se demonstreze că există elevi care cunosc ambele limbi;

b) Să se determine numărul minim şi numărul maxim de elevi care pot cunoaşte ambele limbi.

3. **a)** Să se arate că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, avem $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x ;

b) Calculaţi $\left[\sqrt{1^2+1}\right]+\left[\sqrt{2^2+2}\right]+...+\left[\sqrt{2014^2+2014}\right]$.

4. Figura alăturată reprezintă o sfoară atârnată între doi stâlpi. Punctul A reprezintă punctul de înălţime minimă faţă de sol, iar punctele B,C sunt punctele în care sfoara este prinsă de stâlpi. Să se demonstreze că lungimea sforii este mai mare decât $\left(10+5\sqrt{2}\right)m$



NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"
profil servicii, tehnologic, ştiinţe ale naturii
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a X-a

1. a) Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^2+2b^2+c^2=2ab+2bc$, atunci $a=b=c$;

b) Să se determine numerele reale x care verifică egalitatea $9^x+2^{2x+1}+25^x=2\left(6^x+10^x\right)$.

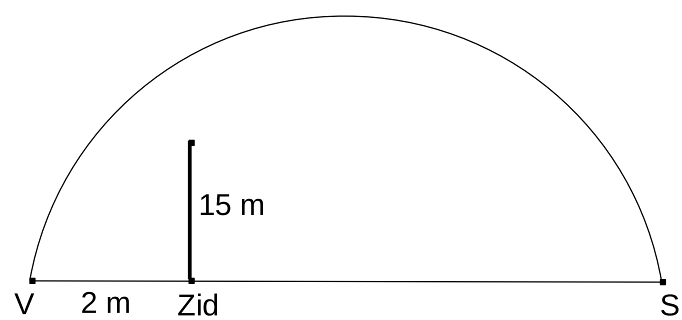
2. a) Fie $a,b,c>1$. Să se arate că $\dfrac{1}{1+\log_{bc}a}+\dfrac{1}{1+\log_{ac}b}+\dfrac{1}{1+\log_{ab}c}=2$;

b) Demonstraţi că $\log_2 9+\log_3 16>4\sqrt{2}$.

3. a) Să se arate că oricare ar fi $u,v\in\mathbb{C}$ avem $|u+2v|^2=3|u|^2+6|v|^2-2|u-v|^2$;

b) Să se determine $z\in\mathbb{C}$, care verifică egalitatea $|z+2i|^2=3|z|^2+6$.

4. În figura alăturată, în punctul V este poziţionat un tun a cărui obuz descrie o traiectorie care poate fi modelată prin funcţia $f(x)=-x^2+10x$, unde x reprezintă distanţa în linie dreaptă faţă de punctul V.



a) Să se arate că în condiţiile figurii, obuzul trece peste zid;

b) Să se arate că un obiectiv O, situat pe dreapta VS, astfel încât $VO=\sqrt{97}m$ nu poate fi nimerit de obuzele tunului.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

INSPECTORATUL
ȘCOLAR JUDEȚEAN
HUNEDOARA

MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil servicii, tehnologic, ştiinţe ale naturii
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$.

a) Să se determine valorile minime ale numerelor $p,q\in\mathbb{N}^*$ pentru care $A^p=qI_3$;

b) Să se determine matricea $X\in M_3(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $AX=B$.

2. Pentru orice matrice $A\in M_2(\mathbb{R})$, notăm cu $Tr(A)$ suma elementelor de pe diagonala principală, iar cu ${}^tA$, transpusa sa.

a) Să se arate că oricare ar fi $A\in M_2(\mathbb{R})$, avem $Tr(A^tA)\geq 0$;

b) Să se determine $A\in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $Tr(A^tA)=0$.

3. Într-un sistem de axe xOy, considerăm punctele $A(a, a^2+3a)$, $B(b, b^2+3b)$ şi $C(c, c^2+3c)$.

a) Să se arate că punctele A,B,C nu pot fi coliniare, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{Z}$ diferite;

b) Să se arate că aria triunghiului ABC este număr natural, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{Z}$ diferite.

4. **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2+x^3)}{\sqrt{1+x}-1}$;

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$;

c) Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-ax-b\right)=1$.

NOTĂ
- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil servicii , tehnologic , ştiinţe ale naturii
Faza Zonală - 16 februarie 2014

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legea "$\circ$" prin relaţia $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se determine elementele din $\mathbb{Z}$, simetrizabile în raport cu legea "$\circ$";

b) Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\underbrace{x \circ x \circ x \circ ... \circ x}_{2011} = x$.

2. Se consideră mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a > 2 \right\}$. Pe această mulţime definim legea "$\otimes$" prin

$A \otimes B = AB - 2A - 2B + 6I_2$, pentru orice $A, B \in M$.

a) Să se arate că operaţia "$\otimes$" este lege de compoziţie pe mulţimea M;

b) Să se arate că $(M, \otimes)$ este grup comutativ.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 2x^2 + x + 5$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $af(x) + bf'(x) = 5e^x + 4x^2 + 14x + 13$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

b) Să se calculeze $\int \frac{5e^x + 4x^2 + 14x + 13}{e^x + 2x^2 + x + 5} dx$.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1}, & x > 0 \\ e^x, & x \le 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f admite primitive;

b) Să se determine o primitivă F a lui f pentru care $F(0) = 3$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.