INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a IX-a

1. **a)** Demonstrați identitatea $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$;

b) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ fixat. Determinați numerele $x_1,x_2,..,x_n\in(0,\infty)$, care verifică relația $(x_1+x_2+...+x_k)^2=x_1^3+x_2^3+...+x_k^3$, pentru orice $k\in\{1,2,3,...,n\}$.

2. Fie triunghiul ABC şi G centrul de greutate. Fie $M\in(AB),N\in(BC),P\in(CA)$ astfel încât $\frac{MA}{MB}=\frac{NB}{NC}=\frac{PC}{PA}$. Notăm cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BMN, respectiv CNP. Demonstraţi că triunghiurile ABC şi $G_1G_2G_3$ au acelaşi centru de greutate.

3. **a)** Demonstrați că oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$ și $t\in[0,1]$ are loc inegalitatea $|tx+(1-t)y|+|(1-t)x+ty|\le|x|+|y|$;

b) Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ astfel încât $a\le b\le c\le d$ și $b-a=d-c$. Atunci $|b|+|c|\le|a|+|d|$.

4. Fie $x,y,z\in(0,\infty)$ cu proprietatea $xy,xz,yz\le 1$.

a) Determinați $m\in(0,\infty)$ maxim pentru care $\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2}\ge m(1+xy)$, pentru orice $x,y\in(0,\infty)$ cu proprietatea $xy\le 1$;

b) Demonstrați inegalitatea $\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2}+\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{2+x^2+z^2}+\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{2+y^2+z^2}\ge\frac{3+xy+xz+yz}{2}$.

(Gazeta Matematică - 9/2013)

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a X-a

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]+[-x]$.

a) Determinaţi imaginea funcţiei f;

b) Fie numerele reale $x_1,x_2,...,x_{2014}$ cu proprietatea că $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{2014})=-2013$. Determinaţi cardinalul mulţimii $\mathbb{Z}\cap\{x_1,x_2,...,x_{2014}\}$.

2. Pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de numere reale notăm cu $S_n=x_1+x_2+...+x_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu termenii pozitivi. Atunci $\frac{S_n}{n}\geq\sqrt{a_1a_n}$;

b) Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu $b_n\geq 1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Atunci, $\lg\left(\frac{S_n}{n}\right)\geq\sqrt{\lg b_1\cdot\lg b_n}$.

3. a) Demonstraţi că $(1+x)^n\geq 1+nx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in(-1,\infty)$;

b) Determinaţi $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{1+2x}+\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[4]{1+4x}+\sqrt[5]{1+5x}=4+4x$.

4. Fie a,b,c numere complexe distincte de acelaşi modul. Demonstraţi că imaginile lor geometrice sunt vârfurile unui triunghi echilateral dacă şi numai dacă $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=0$.

Gazeta Matematică - 9/2013

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a XI-a

1. a) Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

b) Fie $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Calculați B^{300}.

2. Pentru un șir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definim șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prin relațiile $x_n = \min(a_n, a_{n+1})$ și $y_n = \max(a_n, a_{n+1})$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că dacă șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are limită, atunci și șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ au limită;

b) Este reciproca adevărată?

Gazeta Matematică - 11/ 2013

3. a) Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$. Demonstrați că $\det(A + xB) = \det(A) + \big(Tr(A)Tr(B) - Tr(AB)\big)x + \det(B)x^2$, $\forall x \in \mathbb{C}$;

b) Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ și $\det(A^2 + B^2) = 0$. Demonstrați că $Tr(A)Tr(B) = Tr(AB)$.

4. Fie $a, b \in (0, \infty)$ și definim șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, respectiv $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prin relațiile $x_1 = a$, $y_1 = b$ și $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că aceste șiruri sunt convergente și au aceeași limită;

b) Determinați limita acestor șiruri.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a XII-a

1. Fie $(G,\bullet)$ un grup. Pentru orice $x \in G$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $x^n = \underbrace{x \bullet x \bullet \ldots \bullet x}_{n \text{ ori } x}$.

a) Demonstrați că oricare ar fi $m,n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in G$ are loc egalitatea $x^m \bullet x^n = x^n \bullet x^m$;

b) Fie $x,y \in G$ cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^n = y$. Demonstrați că $x \bullet y = y \bullet x$.

2. Fie funcția $f:(0,\infty) \to (0,2)$, $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ și legea "$*$" definită pe $(0,2)$ prin relația $x * y = \dfrac{xy}{xy - x - y + 2}$.

a) Demonstrați că $f(xy) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x,y \in (0,2)$;

b) Determinați $u \in (0,2)$ pentru care $u * u * u = \dfrac{4}{3}$.

3. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;

b) Demonstrați că $\dfrac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{2(n-1)}$, pentru orice $n \ge 2$;

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

4. a) Fie $f:[0.1] \to [0,\infty)$ continuă, diferită de funcția nulă. Demonstrați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx > 0$.

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm funcțiile continue $f_1, f_2, \ldots, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\displaystyle\int_0^1 f_k^2(x)dx = \frac{2k-1}{n}$, pentru orice $k \in \{1,2,3\ldots,n\}$. Demonstrați că există $\alpha \in [0,1]$ pentru care $f_1(\alpha) + f_2(\alpha) + \ldots. + f_n(\alpha) \le n$.

Supliment Gazeta Matematică, noiembrie 2013

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.