Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a V-a

1. Gigel a rezolvat luni un sfert din problemele pe care şi le-a propus pentru o săptămână, marţi a rezolvat o treime din cele rămase, iar miercuri a rezolvat jumătate din cele rămase şi a constatat că i-au mai rămas de rezolvat 12 probleme. Câte probleme şi-a propus să rezolve Gigel în acea săptămână ?

2. Se consideră numerele $A=\left(13^{23}\cdot 13^{32}:13^{54}-\left(9^{3}\right)^{6}:9^{17}\right)^{33}$ și $B=243\cdot 81^{15}:27^{7}$.

a) Demonstrați egalitatea $A=2^{66}$;
b) Determinați valoarea numărului $x\in\mathbb{N}$ care verifică relația $B=3^{x}$;
c) Demonstrați inegalitatea $A<B$.

3. Se consideră numărul $N=9+99+999+\ldots+\underbrace{999\ldots999}_{2014\ cifre}+2014$

a) Demonstrați că numărul N este divizibil cu 10;
b) Determinați restul împărțirii numărului N la 111.

Supliment Gazeta Matematică, noiembrie 2013

4. Marius și Bogdan pornesc un joc în care se folosesc doar numerele din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Regula jocului este următoarea: *Marius alege un număr din mulțimea A. Apoi alege Bogdan, iarăși Marius , din nou Bogdan etc, alegând alternativ. Începând cu al doilea număr ales, fiecare copil calculează suma tuturor numerelor alese, inclusiv ale adversarului, până la ultimul ales de el însuși. Jocul este câștigat de copilul care obține primul suma 49.*

a) Dacă Marius începe cu numărul 3, prezentați o variantă de alegeri care îl dau câștigător pe Bogdan;
b) Dacă Marius începe cu numărul 5, descrieți ce strategie trebuie să abordeze Bogdan pentru a fi sigur de victorie;
c) Cu ce număr trebuie să înceapă Marius pentru a putea avea șanse de victorie?

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a VI-a

1. Fie a,b,c cifre nenule și numărul $A=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$.

a) Demonstrați că numărul A este divizibil cu 3;

b) Demonstrați că numărul A nu este divizibil cu 28, oricare ar fi cifrele a,b,c.

2. Două unghiuri suplementare au o latură comună și bisectoarele lor determină un unghi de 60°. Determinați măsurile celor două unghiuri.

Gazeta Matematică - 10/2013

3. O mulţime M de numere raţionale are următoarele proprietăţi :

1) $6\in M$ și $12\in M$;

2) dacă $x\in M$ și $y\in M$ atunci $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\in M$;

3) dacă $(2x+3y)\in M$, atunci $(x+y)\in M$.

Arătaţi că :

a) Mulţimea M conţine cel puţin două numere naturale consecutive;

b) Mulţimea M conţine cel puţin trei numere prime;

c) Există $a,b,c,d\in M$, distincte două câte două, astfel încât $a+b=c+d$.

4. De dimineaţă o rândunică zboară pe o creangă a unui copac şi ciripeşte o dată, apoi zboară pe o a doua creangă şi ciripeşte de două ori, apoi pe a treia creangă şi ciripeşte de trei ori şi aşa mai departe (pe a 20-a creangă ciripeşte de 20 de ori…). Pe a câta creangă se află rândunica când ciripeşte pentru a 100-a oară de dimineaţă ?

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a VII-a

1. **a)** Fie $a,b,c \in \mathbb{N}^*$, respectiv invers proporționale cu $x,y,z \in \mathbb{N}^*$. Arătați că dacă $b^2 = ac$, atunci $y^2 = xz$;

b) Fie numerele $a_1, a_2, a_3,...,a_{12} \in \mathbb{N}^*$ respectiv, invers proporționale cu $2,\ 2^2, 2^3,....,2^{12}$. Demonstrați că numărul $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{12}$ este cub perfect.

2. Se consideră patrulaterul $ABCD$ în care $m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ$, $[AC] \equiv [AD]$ și $m(\sphericalangle BAC) \equiv m(\sphericalangle CAD) = 20^\circ$. Se consideră punctul $E \in (AC)$ astfel încât $DE \perp AC$. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle EBC$.

3. În paralelogramul $ABCD$, M este mijlocul laturii $[DC]$, $BM \cap AD = \{N\}$, $CN \cap AB = \{P\}$, $BM \cap AC = \{T\}$.

a) Demonstrați că $BDNC$ și $BDCP$ sunt paralelograme;

b) Demonstrați că punctele D, T, P sunt coliniare.

Supliment Gazeta Matematică, septembrie 2013

4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Fie a,b doi divizori ai lui n pentru care $b > a$. Demonstrați că $b > a + \frac{a^2}{n}$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a VIII-a

1. Fie $x,y,z \in \mathbb{Q}$, $x,y,z > 0$ astfel încât $xyz = 2$.

a) Demonstrați că $\frac{1}{x} + y + z + 2 = \frac{(y+2)(z+2)}{2}$;

b) Demonstrați că numărul $\sqrt{2\left(\frac{1}{x}+y+z+2\right)\left(\frac{1}{y}+z+x+2\right)\left(\frac{1}{z}+x+y++2\right)}$ este rațional.

Supliment Gazeta Matematică, noiembrie 2013

2. Fie tetraedrul $ABCD$. Notăm cu P, Q și R, centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ABD, respectiv ACD. Fie M un punct interior triunghiului BCD și notăm cu X, Y și Z simetricele sale față de punctele P, Q și, respectiv R.

a) Demonstrați că $(PQR) \parallel (BCD)$;

b) Demonstrați că $(XYZ) \parallel (BCD)$.

3. a) Să se demonstreze că $\frac{x+n}{n+1} \geq \frac{n+3}{2x+n+1}$, pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$ și $n \in \mathbb{N}$;

b) Determinați $x \in \mathbb{N}^*$ care verifică egalitatea
$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \ldots + \frac{x+2013}{2014} = \frac{4}{2x+2} + \frac{5}{2x+3} + \ldots + \frac{2016}{2x+2014}$.

4. În paralelogramul $ABCD$ avem $BD \leq AC$. Se consideră punctele $M,N,P,Q \notin (ABC)$, de aceeași parte a planului (ABC) astfel încât MA, NB, PC, QD sunt perpendiculare pe planul (ABC), $MA \leq NB \leq QD \leq PC$, $[AC] \equiv [CP]$ și $[BN] \equiv [BD]$. Se știe că $MP \cap NQ \neq \varnothing$.

a) Demonstrați egalitatea $MA + PC = NB + QD$;

b) Demonstrați că $A_{MAC} \leq A_{QDB}$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro