



Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a IX-a - barem

- | | |
|--|----|
| 1. a) Verificare prin inducție matematică. | 3p |
| b) Se obțin valorile $x_k = k$, pentru $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. | 4p |
-
- | | |
|---|----|
| 2. Dacă notăm $k = \frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PA}$, atunci pentru orice X din plan avem $\overline{XG_1} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XM} + \overline{XP})$
$= \frac{1}{3}\left(\overline{XA} + \frac{\overline{XA} + k\overline{XB}}{1+k} + \frac{\overline{XC} + k\overline{XA}}{1+k}\right)$ și analogele; | 4p |
| Prin însumare se obține $\overline{XG_1} + \overline{XG_2} + \overline{XG_3} = \overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}$, care conduce apoi la concluzie. | 3p |
-
- | | |
|--|----|
| 3. a) Se aplică inegalitatea modulului; | 4p |
| b) Ipoteza conduce la existența unui număr $t \in [0, 1]$ astfel încât $b = ta + (1-t)d$ și
$c = (1-t)a + td$. Apoi se aplică punctul precedent. | 3p |
-
- | | |
|--|----|
| 4. a) Un caz particular conduce la concluzia $m \leq \frac{1}{2}$. | 1p |
| Apoi se demonstrează că inegalitatea $\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2} \geq \frac{1}{2}(1+xy)$ este valabilă în ipotezele date. Deci $m = \frac{1}{2}$; | 3p |
| b) Se aplică de trei ori punctul precedent. | 3p |

NOTĂ

- Orice soluție corectă se punctează corespunzător.



Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a X-a - barem

- | | | |
|-------|---|----|
| 1. a) | Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $f(x) = 0$. Dacă $x \notin \mathbb{Z}$, atunci $f(x) = -1$ deci $\text{Im}f = \{-1, 0\}$; | 4p |
| b) | Din punctul precedent se obține cardinal egal cu 1. | 3p |
-
- | | | |
|-------|--|----|
| 2. a) | Avem $\frac{S_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} \geq \sqrt{a_1 a_n}$; | 3p |
| b) | Dacă $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este progresie geometrică cu termeni strict pozitivi, atunci $(\lg b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este progresie aritmetică. | 1p |
| | Din punctul precedent $\frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \dots + \lg b_n}{n} \geq \sqrt{\lg b_1 \cdot \lg b_n}$. Se aplică apoi inegalitatea mediilor. | 3p |
-
- | | | |
|-------|---|----------|
| 3. a) | Se demonstrează prin inducție matematică;
OBS: Nu se acordă punct pentru identificarea rezultatului ca fiind inegalitatea lui Bernoulli. | 3p |
| b) | Existența radicalilor conduce la restricția $x \geq -\frac{1}{4}$. Din punctul precedent avem $\sqrt[n]{1+nx} \leq 1+x$.
Scriem inegalitatea pentru $n = 2, 3, 4, 5$ și le adunăm. Se obține
$\sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[4]{1+4x} + \sqrt[5]{1+5x} \leq 4+4x$. egalitatea este posibilă numai dacă $x = 0$. | 1p
3p |
-
- | | | |
|----|---|----------|
| 4. | Avem $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$.
În condițiile din ipoteză, triunghiul este echilateral dacă și numai dacă $a+b+c=0$. | 4p
3p |
|----|---|----------|

NOTĂ

- Orice soluție corectă se punctează corespunzător.



Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a XI-a - barem

1. a)	Verificare	4p
b)	Avem $B = 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$ și se aplică punctul precedent.	3p
2. a)	Este consecință a definiției limitei unui șir cu ajutorul vecinătăților;	4p
b)	Reciproca poate fi falsă, de exemplu șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin relația $a_n = (-1)^n$.	3p
3. a)	Verificare;	3p
b)	$\det(A^2 + B^2) = \det(A + iB)\det(A - iB)$, deci unul dintre $\det(A + iB)$ sau $\det(A - iB)$ este nul. Concluzia se obține dacă dăm lui x valoarea i sau $-i$ în relația de la punctul precedent.	2p 2p
4. a)	Evident $x_2 \leq y_2$ și apoi se obține $x_2 \leq x_n \leq y_n \leq y_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se deduce că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător, iar șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ descrescător și obținem convergența lor. Din a doua relație de recurență obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.	2p 2p 1p
b)	Dar $x_{n+1}y_{n+1} = x_n y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, de unde obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{ab}$.	2p

NOTĂ

- Orice soluție corectă se punctează corespunzător.



Olimpiada de matematică
Faza locală - 16 februarie 2014

Clasa a XII-a - barem

1. a)	Verificare pe baza asociativității;	4p
b)	Verificare pe baza punctului precedent.	3p
2. a)	Verificare;	3p
b)	Funcția f este bijectivă, deci există $a \in (0, \infty)$ astfel încât $f(a) = u$.	2p
	Atunci $u * u * u = \frac{4}{3}$ conduce $f(a^3) = \frac{4}{3}$, de unde $a = \sqrt[3]{2}$ și $u = \frac{2\sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[3]{2}}$.	2p
3. a)	Verificare;	2p
b)	Se aplică monotonia integralei și punctul precedent;	3p
c)	Se aplică punctul precedent și criteriul cleștelui și obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} n!_n = \frac{1}{2}$	2p
4. a)	Există cel puțin un punct $u \in [0, 1]$ pentru care $f(u) > 0$. Atunci există cel puțin un interval $[a, b] \subset [0, 1]$ pentru care $f(x) > 0$, pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx > 0$.	3p
b)	Presupunem contrariul. Atunci $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) > n$, pentru orice $x \in [0, 1]$. Dar $n \sum_{k=1}^n f_k^2(x) \geq \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right)^2 > n^2$, adică $\sum_{k=1}^n f_k^2(x) > n$. Folosind punctul precedent se obține $\sum_{k=1}^n \int_0^1 f_k^2(x) dx > n$, care contrazice ipoteza deoarece $\sum_{k=1}^n \int_0^1 f_k^2(x) dx = n$.	4p