



Simularea Examenului de Bacalaureat 2013 - Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

| | | |
|----|---|----------------|
| 1. | Din ipoteză obținem $r = 6$. Apoi obținem $b_1 = -3$. Atunci $S_n = \frac{(2b_1 + (n-1)r)n}{2} = 297$. | 2p 1p 2p |
| 2. | Avem $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + m)$ $= 1 > 0$, deci ecuația admite rădăcini reale distincte. | 2p 3p |
| 3. | Ecuația devine $ 2x+1 = 4$. Obținem soluțiile $2x+1 = -4$ și $2x+1 = 4$. La final avem $x_1 = -\frac{5}{2}$ și $x_2 = \frac{3}{2}$. | 1p 2p 2p |
| 4. | Avem $T_{k+1} = C_{30}^k x^{30-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{30}^k x^{30-2k}$; Cerința conduce la $30 - 2k = 0$, de unde $k = 15$; Este vorba de T_{16} . OBSERVAȚIE: Elevii care scriu corect formula termenului general $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, dar nu dezvoltă exercițiul în continuare, primesc 1p. | 2p 2p 1p |
| 5. | Punctul M are coordonatele $x_M = 2$ și $y_M = 4$; Folosind formula distanței obținem $CM = \sqrt{10}$ | 2p 3p |
| 6. | Avem $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$. Teorema sinusurilor ne conduce la $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, de unde $\frac{AB}{1/2} = \frac{BC}{\sqrt{2}/2}$; Obținem $BC = 3\sqrt{6}$. OBSERVAȚIE: Scrierea relației $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$, fără folosirea sa ulterioară conduce la acordarea unui punct. | 1p 2p 2p |



SUBIECTUL II

(30 puncte)

| | | |
|--------------|--|--|
| 1. a) | Alegerea $a = b = c = 0$ conduce la concluzia $O_3 \in G$; Alegerea $a = 1$ și $b = c = 0$ conduce la concluzia $I_3 \in G$ | 2p 3p |
| 1. b) | Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$; Prin calcul obținem $AB = \begin{pmatrix} ax & ay + bx & az + by + cx \\ 0 & ax & ay + bx \\ 0 & 0 & ax \end{pmatrix} \in G$. | 1p 4p |
| 1. c) | Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Ipoteza $\det(A) = 0$ conduce la concluzia $a = 0$; Atunci $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^3 = O_3$; Obținem $A^{2013} = O_3$. | 2p 2p 1p |
| 2. a) | Dacă notăm cu $e \in \mathbb{R}$ elementul neutru, atunci avem $x \circ e = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; Obținem $e = 7 \in \mathbb{R}$; Se verifică apoi $7 \circ x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. OBSERVAȚIE: Ultima parte poate fi substituită dacă se demonstrează comutativitatea legii. | 1p 3p 1p |
| 2. b) | Pentru $n = 2$ se verifică ușor relația $x \circ x = (x - 6)^2 + 6$; Pentru $n = k$ presupunem adevărată relația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{k \text{ ori de } x} = (x - 6)^k + 6$, iar pentru $n = k + 1$, demonstrăm relația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{(k+1) \text{ ori de } x} = (x - 6)^{k+1} + 6$; Avem $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{k+1 \text{ ori de } x} = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{k \text{ ori de } x} \circ x = ((x - 6)^k + 6)x - 6((x - 6)^k + 6) - 6x + 42 = (x - 6)^{k+1} + 6$. Concluzia: pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ are loc relația: $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori de } x} = (x - 6)^n + 6$. | 1p 1p 2p 1p |
| 2. c) | Din punctul anterior avem $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{8 \text{ ori de } x} = (x - 6)^8 + 6$; Obținem ecuația $(x - 6)^8 + 6 = 262$, adică $(x - 6)^8 = 256 = 2^8$, de unde $x - 6 = \pm 2$; Avem soluțiile $x_1 = 4$ și $x_2 = 8$. | 1p 2p 2p |



SUBIECTUL III

(30 puncte)

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|--|----------------|----------|---|----------|---------|-----------|-------------|--|--------|-------|-----------|--|----------------|
| 1. a) | <p>Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, nu există asimptotă orizontală la $+\infty$, deci trebuie căutată asimptota oblică;</p> <p>Apoi $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 2 = n$;</p> <p>Deducem că ecuația asimptotei oblice este $y = mx + n = x + 2$.</p> | 1p 2p 2p | | | | | | | | | | | | |
| 1. b) | <p>Avem $f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.</p> <p>Avem următorul tabel de variație</p> <table><tr><td>x</td><td>2</td><td>4</td><td>∞</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td> - - - - -</td><td>0 + + + + +</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td> ↘ ↘ ↘</td><td>8 ↗ ↗ ↗ ↗</td><td></td></tr></table> <p>Punctul de extrem are coordonatele $(4; 8)$.</p> | x | 2 | 4 | ∞ | $f'(x)$ | - - - - - | 0 + + + + + | | $f(x)$ | ↘ ↘ ↘ | 8 ↗ ↗ ↗ ↗ | | 2p 2p 1p |
| x | 2 | 4 | ∞ | | | | | | | | | | | |
| $f'(x)$ | - - - - - | 0 + + + + + | | | | | | | | | | | | |
| $f(x)$ | ↘ ↘ ↘ | 8 ↗ ↗ ↗ ↗ | | | | | | | | | | | | |
| 1. c) | <p>Din tabelul de variație avem că f este strict crescătoare pe intervalul $(4, \infty)$</p> <p>. Cum $\ln 2012, \ln 2013 \in (4, \infty)$ obținem $f(\ln 2012) < f(\ln 2013)$;</p> <p>Avem $\frac{\ln^2 2012}{\ln 2012 - 2} < \frac{\ln^2 2013}{\ln 2013 - 2}$ și apoi concluzia.</p> | 1p 2p 2p | | | | | | | | | | | | |
| 2. a) | <p>Avem $V = \pi \int_1^2 f^2(x) dx = \pi \int_1^2 (x^2 + 1) dx$</p> <p>Dar $\int_1^2 (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^2 + x \Big _1^2 = \frac{10}{3}$, $V = \frac{10\pi}{3}$.</p> | 1p 4p | | | | | | | | | | | | |
| 2. b) | <p>Folosim schimbarea de variabilă $x^2 + 1 = y$.</p> <p>Obținem $\int_1^2 xf(x) dx = \int_1^2 x\sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_2^5 \sqrt{y} dy = \frac{y\sqrt{y}}{3} \Big _2^5 = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{3}$.</p> | 1p 4p | | | | | | | | | | | | |
| 2. c) | <p>Avem $\int_1^2 e^x f^2(x) dx = \int_1^2 e^x (x^2 + 1) dx = e^x (x^2 + 1) \Big _1^2 - \int_1^2 2xe^x dx$</p> <p>$= 5e^2 - 2e - \left(2xe^x \Big _1^2 - 2 \int_1^2 e^x dx \right) = 5e^2 - 2e - 4e^2 + 2e + 2e^x \Big _1^2$</p> <p>$= 3e^2 - 2e$.</p> | 2p 2p 1p | | | | | | | | | | | | |