



Simularea Examenului de Bacalaureat 2013 - Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

1.	Folosind forma algebrică $z = a + bi$, ipoteza devine $(3a + b) + (a + 3b)i = 10 + 6i$; Obținem ecuațiile $3a + b = 10$ și $a + 3b = 6$, de unde $a = 3$ și $b = 1$; Numărul căutat este $z = 3 + i$.	1p 3p 1p
2.	Fie $a, b \in (1, \infty)$ astfel încât $f(a) = f(b)$. Avem $a^2 - 2a + 3 = b^2 - 2b + 3 \Rightarrow (a - b)(a + b - 2) = 0$. Cum $a + b < 2$, obținem $a = b$ deci f este injectivă. Apoi $f(x) = (x - 1)^2 + 2$. Cum $x \in (1, \infty)$ obținem $\text{Im} f = (2, \infty)$, deci f este surjectivă; Deoarece f este injectivă și surjectivă atunci este bijectivă. OBSERVAȚIE: Studiul bijectivității se poate realiza și cu ajutorul derivatei și a tabelului de variație.	2p 2p 1p
3.	Condițiile de existență sunt $x - 3 \geq 0$ și $5 - x \geq 0$; Prin ridicare la pătrat obținem $x - 3 = (5 - x)^2$, adică ecuația $x^2 - 11x + 28 = 0$; Ecuația are soluțiile $x_1 = 4$ și $x_2 = 7$. Dintre acestea numai $x_1 = 4$ verifică condițiile de existență.	1p 2p 2p
4.	Sunt 5 cifre pare; Folosind regula produsului se obțin 48 de numere.	1p 4p
5.	Ecuația dreptei BC se obține prin calcul ca fiind: $2x + y - 13 = 0$; Avem $d(A, BC) = \frac{ 2 + 1 - 13 }{\sqrt{4 + 1}} = 2\sqrt{5}$.	3p 2p
6.	Se demonstrează relațiile $\cos 105^\circ = -\cos 75^\circ$ și $\cos 95^\circ = -\cos 85^\circ$; Se obține concluzia.	4p 1p

SUBIECTUL II

(30 puncte)

1. a)	Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Atunci $\text{Tr}(B + C) = a + x + d + y$; Apoi $\text{Tr}(B) + \text{Tr}(C) = a + d + x + y$ și apoi concluzia.	2p 3p
1. b)	Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$. Ipoteza conduce la $a^2 + bc = 0$, $b(a + d) = 0$, $c(a + d) = 0$ și $bc + d^2 = 0$;	1p



	Din $b(a+d)=0$ avem $a+d=0$, adică $Tr(A)=0$ sau $b=0$, de unde $a^2=0$ și $d^2=0$ și apoi concluzia. OBSERVAȚIE: Se poate rezolva și cu ajutorul teoremei Hamilton-Cayley	2p 2p
1. c)	Presupunem prin reducere la absurd că există $X, Y \in G$ astfel încât $X+Y=I_2$; Atunci $Tr(X+Y)=Tr(I_2) \stackrel{a)}{\Rightarrow} Tr(X)+Tr(Y) \stackrel{b)}{=} 2 \Rightarrow 0+0=2$, ceea ce reprezintă o contradicție.	1p 4p
2. a)	Avem $f=X^3-3X^2+3X-1=(X-1)^3$; Atunci $x_1=x_2=x_3=1$. OBSERVAȚIE: Eventual poate fi găsită o rădăcină $x_1=1$ și apoi determinate celelalte două după împărțirea cu $X-1$.	2p 3p
2. b)	Folosind relațiile lui Viète obținem $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(m+2)^2-2(m^2+2)=-m^2-4m$; Concluzia se obține acum prin calcul.	2p 3p
2. c)	Deoarece $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, atunci $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2 \geq 0$ $\Rightarrow -4(m^2-2m+1) \geq 0 \Rightarrow (m^2-2m+1) \leq 0$ $\Rightarrow (m-1)^2 \leq 0 \Rightarrow m=1$.	2p 1p 2p

**SUBIECTUL III
(30 puncte)**

1. a)	Avem $f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (x)' \ln x}{x^2}$; Prin calcul obținem $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.	1p 4p																						
1. b)	Din $f'(x) = 0$ obținem $x = e$; Tabelul de variație este următorul <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>e</td><td>∞</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>\nearrow</td><td>\nearrow</td><td>$\frac{1}{e}$</td><td>\searrow</td><td>\searrow</td><td>0</td></tr></table> Din acest tabel obținem $\text{Im}f = \left[-\infty, \frac{1}{e}\right]$.	x	0	e	∞	$f'(x)$	+	+	+	+	0	-	-	-	-	$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow	\searrow	0	1p 3p 1p
x	0	e	∞																					
$f'(x)$	+	+	+	+	0	-	-	-	-															
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow	\searrow	0																	
1. c)	Conform punctului anterior, pentru orice $u, v \in (0, \infty)$, avem $f(u) + f(v) \leq \frac{2}{e}$; Egalitate are loc dacă și numai dacă $u = v = e$, deci perechea (e, e) este singura care verifică cerința.	2p 3p																						
2. a)	Folosind metode integrării prin părți obținem	3p																						



	$\int_0^{\pi/2} f_1(x) dx = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = -x \cos x \Big _0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx$ $= \sin x \Big _0^{\pi/2} = 1.$	2p
2. b)	Folosim schimbarea de variabilă $f_3(x) = t$; Atunci $\int_0^{\pi} f_3'(x) f_3(x) dx = \int_0^0 t dt = 0.$	2p 3p
2. c)	Pentru orice $x \in [0,1]$ avem $f_{2012}(x) = x^{2012} \sin x \leq x^{2012}$; Atunci $\int_0^1 f_{2012}(x) dx \leq \int_0^1 x^{2012} dx = \frac{x^{2013}}{2013} \Big _0^1 = \frac{1}{2013}.$	2p 3p