Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a IX-a – ştiinţe ale naturii

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică . Ştiind că $a_1>0, r>0$. Să se arate că

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n},\ \forall n\geq 2.$$

2. a) Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{x+1}{2}\right]=\frac{x+2}{3}$.

b) Să se demonstreze inegalitatea: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},\quad n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$.

3. a) Fie ABC un triunghi şi punctele $M\in AB$, $N\in AC$ şi $P\in BC$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ şi P mijlocul segmentului $[BC]$. Să se afle suma $a+b$, unde $\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AM}+b\overrightarrow{AN}$.

b) Fie triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ având centrele de greutate G respectiv G_1. Să se arate că $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=3\overrightarrow{GG_1}$.

4. Se consideră un pătrat având perimetrul P_1. Pornind de la acest pătrat construim un şir de n pătrate, $n\in\mathbb{N}^*$, astfel: al doilea pătrat de perimetru P_2 este pătratul care are ca vârfuri mijloacele laturilor pătratului iniţial, al treilea pătrat este pătratul de perimetru P_3, care are ca vârfuri mijloacele laturilor celui de-al doilea pătrat, ş.a.m.d.

a) Arătaţi că $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică de raţie $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Al câtelea pătrat are perimetrul egal cu o optime din perimetrul primului pătrat?

c) Dacă primul pătrat are perimetrul egal cu 10, câte dintre primele 2013 pătrate au perimetrele numere raţionale?

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a X-a – ştiinţe ale naturii

1. **a)** Să se compare numerele $a=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ şi $b=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$.

b) Să se arate că numărul $a=\log_{\sqrt{3}}\dfrac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3}{5+2\sqrt{6}}$ este număr natural.

2. **a)** Să se calculeze $A=\lg(2-\sqrt{3})+\lg(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\lg(2+\sqrt{3})$.

b) Dacă $a,b\in(0,1)$, să se demonstreze inegalitatea: $\log_a\dfrac{2ab}{a+b}+\log_b\dfrac{2ab}{a+b}\geq 2$.

3. **a)** Să se determine $z\in\mathbb{C}$ dacă $2\bar{z}+z=3+4i$.

b) Să se determine $z\in\mathbb{C}$, care verifică egalitatea $|z-3i|^2=2|z|^2+18$.

4. În urma unor cercetări, s-a stabilit că solubilitatea în apă a unei substanţe s în raport cu temperatura (măsurată în grade Celsius), este dată de o formulă de forma $S(t)=at^2+bt+c$, unde $a,b,c\in(0,\infty)$, iar $t\geq 10$ (grade Celsius). Experimental, s-au determinat valorile solubilităţii la câteva temperaturi, anume: $S_1=10$, $S_2=15$, $S_3=25$, pentru temperaturile $t_1=20, t_2=25$, respectiv $t_3=30$. (Solubilitatea S este exprimată în g substanţă s la 100g apă).

a) Găsiţi valoarea solubilităţii substanţei date s la temperatura de 50^o;

b) Arătaţi că există două temperaturi diferite la care solubilitatea substanţei s este aceeaşi.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a XI-a – Științe ale naturii

1. Unui elev i se scrie pe tablă matricea $A=\begin{pmatrix} -10 & * & -7 \\ * & -2 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. Profesorul îi cere să înlocuiască asteriscurile cu numere întregi astfel încât, după completare, sumele tuturor numerelor de pe fiecare linie, fiecare coloană şi de pe cele două diagonale să fie egale. Este posibil acest lucru ? În caz afirmativ ce matrice obţine elevul ?

2. **a)** Să se demonstreze că $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$, pentru orice matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

b) Pentru orice matrice $A\in M_2\left(\mathbb{R}\right)$, notăm cu $Tr\left(A\right)$ suma elementelor de pe diagonala principală, iar cu ${}^tA$, transpusa sa. Să se arate că oricare ar fi $A\in M_2\left(\mathbb{R}\right)$, avem $Tr\left(A\,{}^tA\right)\geq 0$.

3. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n(n,n+2),\ n\in\mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se arate că toate punctele A_n sunt coliniare.

c) Să se demonstreze că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de n.

4. **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+7}+x\right)$.

c) Să se determine asimptota spre $-\infty$ la graficul funcţiei $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a XII-a – Științe ale naturii

1. Pe $(6,\infty)$ definim legea "$\circ$" prin relaţia $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42, \forall x,y \in (6,\infty)$.

a) Să se determine elementul neutru al legii şi elementele simetrizabile în raport cu legea "$\circ$";

b) Să se determine $x \in (6,\infty)$ pentru care $\underbrace{x \circ x \circ x \circ ... \circ x}_{2013} = x$.

c) Să se arate că funcţia $f:(0,\infty) \to (6,\infty), f(x) = x + 6$ este izomorfism între grupurile $((0,\infty),\cdot)$ şi $((6,\infty),\circ)$

2. În mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{X(a) | X(a) = I_2 + aA, a > -1\}$.

a) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab), \forall a,b > -1$;

b) Să se arate că $X(1) \cdot X(2) \cdot ... \cdot X(n) = X((n+1)! - 1)$.

3. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia dată admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se determine o primitivă F a lui f.

4. Să se calculeze:

a) $\int \sqrt{x^2 + 3}dx, x \in \mathbb{R}$.

b) $\int \dfrac{e^{arctgx} + x\ln(x^2+1) + 1}{x^2+1} dx, x \in \mathbb{R}$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro