



Olimpiada Națională de Matematică

Etapă Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră numere naturale impare $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$. Demonstrați că numărul $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2012}^2} - 1$ este irațional.

Soluție. Numărul A este rațional dacă și numai dacă numărul $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2012}^2 - 1$ este pătrat perfect.

..... 1p
Pătratul unui număr impar este de forma $4k + 1$, cu $k \in \mathbb{N}$.

..... 2p
Suma $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2012}^2$ este un multiplu de 4, deoarece $4 \mid 2012$.

..... 2p
Atunci $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2012}^2 - 1$ este un număr impar de forma $4k + 3$, deci nu e pătrat perfect.

..... 2p

Problema 2. Se consideră numerele reale strict pozitive a, b și c cu proprietatea că $a^2 + ab + ac - bc = 0$.

a) Arătați că dacă două dintre numerele a, b și c sunt egale, atunci cel puțin unul dintre cele trei numere este irațional.

b) Arătați că există o infinitate de triplete de numere naturale nenule (m, n, p) cu proprietatea că $m^2 + mn + mp - np = 0$.

Soluție. a) Observăm că relația este simetrică în b și c , deci avem două cazuri: $a = b$ sau $b = c$. Dacă $a = b$ relația devine $2a^2 = 0$, fals.

..... 2p
Dacă $b = c$, atunci $a^2 + 2ab = b^2$, de unde $(a + b)^2 = 2b^2$. Rezultă $a + b = b\sqrt{2}$, deci $a = b(\sqrt{2} - 1)$. Dacă b este irațional, el satisface cerința. Dacă b este rațional, atunci a este irațional și cerința este îndeplinită.

..... 2p
b) Căutăm triplete de forma (m, mu, mv) , cu m, u, v numere naturale nenule. Relația se scrie $1 + u + v - uv = 0$ sau $(u - 1)(v - 1) = 2$.

..... 2p
Luăm $u = 2, v = 3$ și obținem tripletele $(m, 2m, 3m)$, $m \in \mathbb{N}^*$, care verifică cerința.

..... 1p

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Se consideră punctele $M, N \in (BC)$, $Q \in (AB)$ și $P \in (AC)$ astfel încât $MNPQ$ este dreptunghi. Demonstrați că centrul dreptunghiului $MNPQ$ coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $AB = AC = 3AP$.

Soluție. Fie D mijlocul laturii BC și fie G centrul dreptunghiului $MNPQ$. Din ipoteză rezultă că punctele A, G, D sunt coliniare și $AG = 2 \cdot GD$.

..... 1p

Paralela din E la BC intersectează segmentele AB, QM, PN și AC în punctele E, R, S și F , respectiv. Atunci $GE = GF$ și $GR = GS$, de unde rezultă $ER = SF$.

..... 2p

Triunghiurile QRE și PSF sunt congruente – cazul L.U.L. Obținem $\angle QER = \angle PFS$, de unde $\angle ABC = \angle ACB$ și $AB = AC$.

..... 2p

Pe de altă parte, cum G este mijlocul lui PM , segmentul GF este linie mijlocie în triunghiul PMC , deci $PF = FC$.

..... 1p

Din teorema lui Thales, obținem $\frac{CF}{FA} = \frac{DG}{GA} = \frac{1}{2}$, prin urmare $AP = PF = FC$, deci $AB = AC = 3AP$.

..... 1p

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ și punctul E pe latura AB . Dreapta DE intersectează dreapta BC în punctul F , iar dreapta CE intersectează dreapta AF în punctul G . Demonstrați că dreptele BG și DF sunt perpendiculare.

Soluție. Notăm $AB = a$, $AE = x$ și fie $P \in (BC)$ astfel încât $BP = x$. Din congruența triunghiurilor ADE și ABP rezultă că $AP \perp DF$.

..... 2p

Triunghiurile AED și BEF sunt asemenea, deci $\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BF}$, de unde $BF = \frac{a(a-x)}{x}$.

..... 2p

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ABF cu transversala $G - E - C$, obținem $\frac{AG}{GF} = \frac{BC}{FC} \cdot \frac{EA}{EB} = \frac{x^2}{a(a-x)}$.

..... 2p

Cum $\frac{BP}{BF} = \frac{x^2}{a(a-x)}$, rezultă $BG \parallel AP$, de unde $BG \perp DF$.

..... 1p