



## Olimpiada Națională de Matematică

**Etapă Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012**

### SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a

**Problema 1.** Pe dreapta  $d$  se consideră punctele  $A, B, C, D, E$  astfel încât  $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DE]$ . Fie  $M$  un punct exterior dreptei  $d$  astfel încât distanța de la punctul  $B$  la dreapta  $MA$  este egală cu distanța de la punctul  $D$  la dreapta  $ME$ . Arătați că distanțele de la punctul  $C$  la dreptele  $MA$  și  $ME$  sunt egale.

**Soluție.** Fie  $P$  și  $Q$  picioarele perpendicularelor duse din  $B$  și  $D$  pe  $MA$ , respectiv  $ME$ . Triunghiurile  $ABP$  și  $EDQ$  sunt congruente (cazul I.C.), deci  $\widehat{MAB} \equiv \widehat{MED}$ .

..... 2p

Fie  $R$  și  $S$  proiecțiile lui  $C$  pe  $MA$  și  $ME$  respectiv.

..... 1p

Triunghiurile  $RCA$  și  $SCE$  sunt congruente (cazul I.U.).

..... 3p

Rezultă că  $CR = CS$ , ceea ce trebuia demonstrat.

..... 1p

**Problema 2.** Pentru fiecare număr natural  $n$  notăm cu  $s(n)$  suma cifrelor sale. Fie  $a$  un număr natural cu 2012 cifre, care este divizibil cu 9. Arătați că numărul  $s(s(s(a)))$  este pătrat perfect.

**Soluție.** Numărul  $s(a)$  este divizibil cu 9 și este cel mult egal cu  $9 \cdot 2012 = 18108$ .

..... 3p

Cum  $s(a)$  are cel mult 5 cifre, rezultă că numărul  $s(s(a))$  este divizibil cu 9 și este cel mult egal cu 45.

..... 2p

Rezultă că  $s(s(s(a))) = 9$ , care este pătrat perfect.

..... 2p

**Observație.** În lipsa altor realizări, pentru menționarea faptului că dacă un număr este divizibil cu 9, atunci suma cifrelor este divizibilă cu 9 se acordă **1 punct**, iar pentru deducerea faptului că  $s(s(s(a)))$  se divide cu 9 se acordă **2 puncte**. Aceste punctaje **nu** se cumulează.

**Problema 3.** În sala de sport se antrenează mai mulți copii, fete și băieți. Numărul fetelor este de două ori mai mare decât numărul băieților.

Pentru un exercițiu demonstrativ, antrenorul alege la întâmplare doi copii. Probabilitatea de a alege un băiat și o fată este de șase ori mai mare decât probabilitatea de a alege doi băieți. Aflați câți copii sunt în sala de sport.

**Soluție.** Fie  $n$  numărul băieților și  $2n$  numărul fetelor. Dacă antrenorul alege doi băieți, pe primul îl alege dintre cei  $n$ , pe al doilea dintre cei  $n - 1$  rămași și, cum fiecare grupă de doi băieți este astfel numărată de câte două ori, vom avea  $\frac{n(n-1)}{2}$  cazuri favorabile.

..... **3p**

Dacă antrenorul alege un băiat și o fată, există  $n \cdot 2n = 2n^2$  cazuri favorabile.

..... **2p**

Numărul cazurilor posibile fiind același – anume  $\frac{3n(3n-1)}{2}$  – condiția din enunț revine la  $6 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 2n^2$ , de unde  $n = 3$ . În sala de sport se află 9 copii.

..... **2p**

**Notă.** Dacă elevul precizează că pentru ambele evenimente numărul cazurilor posibile este același, fără a-l calcula efectiv, el nu va fi depunctat.

**Problema 4.** O mulțime  $A$  de numere naturale nenule se numește *primară* dacă diferența oricăror două elemente ale sale este divizibilă cu 3 sau cu 5.

a) Dați exemplu de o mulțime primară cu 4 elemente, care conține elementele 2 și 2012.

b) Arătați că suma elementelor unei mulțimi primare cu 15 elemente este multiplu de 3 sau de 5.

**Soluție. a)** De exemplu  $A = \{2, 12, 22, 2012\}$ .

..... **2p**

**b)** Vom arăta că diferențele dintre elementele unei mulțimi primare sunt toate divizibile cu 3 sau toate divizibile cu 5.

Presupunând contrariul, fie  $a < b < c$  sunt trei elemente ale unei mulțimi primare astfel încât  $3 \mid b-a$  și  $5 \nmid b-a$ , respectiv  $5 \mid c-a$  și  $3 \nmid c-a$  (celelalte cazuri se tratează analog).

..... **1p**

Fie  $k, p \in \mathbb{N}$  astfel încât  $b-a = 3k$  și  $c-a = 5p$ ; atunci  $c-b = 5p-3k$ . Dacă  $3 \mid c-b$ , atunci  $3 \mid p$ , de unde rezultă că  $3 \mid c-a$ , fals; la fel, dacă  $5 \mid c-b$ , atunci  $5 \mid k$ , deci  $5 \mid b-a$ , din nou fals.

..... **2p**

Fie  $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_{15}\}$  o mulțime primară cu 15 elemente.

Dacă toate diferențele dintre elementele lui  $A$  se divid cu 3, atunci  $a_2 = a_1 + 3k_1$ ,  $a_3 = a_1 + 3k_2$ , ...,  $a_{15} = a_1 + 3k_{14}$ , unde  $k_1, k_2, \dots, k_{14} \in \mathbb{N}$ . Rezultă că  $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} = 15a_1 + 3(k_1 + k_2 + \dots + k_{14})$ , care este multiplu de 3.

..... **1p**

Dacă toate diferențele dintre elementele lui  $A$  se divid cu 5, atunci  $a_2 = a_1 + 5p_1$ ,  $a_5 = a_1 + 5p_2$ , ...,  $a_{15} = a_1 + 5p_{14}$ , unde  $p_1, p_2, \dots, p_{14} \in \mathbb{N}$ . de unde rezultă că  $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} = 15a_1 + 5(p_1 + p_2 + \dots + p_{14})$ , care este multiplu de 5.

..... **1p**