



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012

CLASA a X-a

Problema 1. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea

$$|f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|,$$

pentru orice $x, y \in [0, \infty)$. Demonstrați că f este mărginită și periodică, iar funcția $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = x + f(x)$ este monotonă.

Problema 2. a) Determinați toate soluțiile reale ale ecuației $2^x = x+1$;
b) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(f(x)) = 2^x - 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $f(0) + f(1) = 1$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie șirul de numere naturale $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_n \leq n$, pentru orice $n \geq 1$ și

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{\pi a_k}{n} = 0,$$

pentru orice $n \geq 2$.

a) Aflați a_2 .

b) Determinați termenul general al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ în funcție de $n \in \mathbb{N}^*$

Problema 4. Fie a și b două numere raționale astfel încât numărul complex $z = a + ib$ să aibă modulul 1.

Arătați că modulul numărului complex $z_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$ este un număr rațional pentru orice n impar.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.