

**Olimpiada Națională de Matematică**

**Etapă Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012**

**CLASA a XI-a SOLUȚII ȘI BAREMURI ORIENTATIVE**

**Problema 1.** Pentru un număr real  $a > 1$  dat, considerăm șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $x_1 = a$  și

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_{n+1},$$

pentru  $n \geq 1$ .

Arătați că șirul este convergent și determinați limita sa.

Gazeta Matematică

**Soluție.** Prin inducție demonstrăm că  $x_n > 0$  și  $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n > 1$  (De exemplu, folosim ipoteza de inducție  $P(n) : x_1, \dots, x_n > 0, x_1 x_2 \cdots x_n > 1$ ).

..... 2 puncte

Din inegalitatea mediilor avem

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq n(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}},$$

de unde  $x_1 x_2 \cdots x_n \geq n^{\frac{n}{n-1}}$ , aceasta atrăgând  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 x_2 \cdots x_n = \infty$

..... 3 puncte

De aici

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} - 1} = 1$$

..... 2 puncte

**Problema 2.** Fie matricele  $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  cu  $AB = O_3$ .

a) Demonstrați că funcția  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dată de  $f(x) = \det(A^2 + B^2 + xAB)$  este polinomială de gradul cel mult 2.

b) Demonstrați că  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ .

**Soluție.**

a) Cum  $\det(AB) = 0$  obținem  $f(x) = \det(A^2 + B^2) + ax + bx^2$ .

..... 2 puncte

b) Dar  $f(i) = \det(A^2 + B^2 + iBA) = \det(A^2 + B^2 + i(BA - AB)) = \det(A + iB) \det(A - iB)$ . Deducem  $f(i) = f(-i)$  de unde  $a = 0$ .

..... 2 puncte

Din  $f(i) = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$  rezultă  $\det(A^2 + B^2) - b \geq 0$

..... 1 punct

Pe de altă parte  $f(1) = \det(A^2 + B^2 + AB + BA) = \det(A + B)^2 \geq 0$ , de unde  $\det(A^2 + B^2) + b \geq 0$ . Prin adunarea ultimelor inegalități obținem  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ .

..... 2 puncte

**Problema 3.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  cu proprietatea că  $AB^2 = A - B$ .

- a) Arătați că matricea  $I_n + B$  este inversabilă;
- b) Arătați că  $AB = BA$ .

**Soluție.** a) Din relația dată avem

$$AB^2 - AB + B + AB - A + I_n = I_n$$

ceea ce se scrie  $(AB - A + I_n)(I_n + B) = I_n$  ..... 3 puncte

b) Relația de inversabilitate se scrie și  $(I_n + B)(AB - A + I_n) = I_n$  sau  $BAB + AB - BA = A - B$ , ceea ce se scrie  $AB^2 = BAB + AB - BA$  adică  $(AB - BA)(B - I_n) = 0_n$  (1) ..... 2 puncte

În mod analog se obține relația  $(AB + A + I_n)(I_n - B) = I_n$  care atrage din inversabilitate  $(I_n - B)(AB + A + I_n) = I_n$  ce devine prin efectuarea înmulțirilor  $(AB - BA)(B + I_n) = 0_n$  (2) ..... 2 puncte

Prin scăderea relațiilor (1) și (2) obținem  $AB - BA = 0_n$ .

**Problema 4.** O funcție  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  are proprietatea  $\mathcal{F}$  dacă pentru orice  $a \in \mathbb{R}$  există un interval  $(b, a)$  astfel încât pentru orice  $x \in (b, a)$  să avem  $f(x) \leq f(a)$ .

- a) Dați un exemplu de funcție cu proprietatea  $\mathcal{F}$  nemonotonă pe  $\mathbb{R}$ .
- b) Arătați că dacă  $f$  este continuă și are proprietatea  $\mathcal{F}$ , atunci  $f$  este crescătoare.

**Soluție.** a) Funcția definită pe  $\mathbb{R}$  prin  $f(x) = 0$  dacă  $x \neq 0$  și  $f(0) = 1$  este în  $\mathcal{F}$  și nu este monotonă. .... 2 puncte

b) Să presupunem că  $f$  nu este crescătoare. Fie atunci  $x_1 < x_2$  astfel încât  $f(x_1) > f(x_2)$ . Considerăm mulțimea

$$M = \{x \in (x_1, x_2) \mid f(x) \leq f(x_2)\}.$$

Din ipoteză  $M$  este nevidă și evident mărginită. Prin urmare există  $a = \inf M$ . .... 2 puncte

Din continuitate avem  $f(a) \leq f(x_2)$  ..... 1 punct

Dacă  $a \in (x_1, x_2)$  există  $b < a$ ,  $b \in (x_1, x_2)$  astfel ca  $f(x) \leq f(a) \leq f(x_2)$  pentru orice  $x \in (b, a)$ , ceea ce contrazice alegerea lui  $a$ . Rezultă  $a = x_1$ , deci  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , contradicție ..... 2 puncte