

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012

CLASA a X-a
Soluții și bareme orientative

Problema 1. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea

$$|f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|,$$

pentru orice $x, y \in [0, \infty)$. Demonstrați că f este mărginită și periodică, iar funcția $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = x + f(x)$ este monotonă.

Soluție. Alegând, de exemplu, $y = \pi$, obținem $|f(x)| - |f(\pi)| \leq |f(x) - f(\pi)| \leq |\sin x| \leq 1$, deci pentru orice $x \in [0, \infty)$ avem $|f(x)| \leq |f(\pi)| + 1$. Așadar f este mărginită. 2 puncte

Mai mult, pentru $y = x + 2\pi$ avem

$$|f(x) - f(x + 2\pi)| \leq |\sin x - \sin(x + 2\pi)| = 0,$$

deci f are perioada 2π 1 punct

Din $|\sin x| \leq |x|$, deducem $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ 1 punct

Ultima inegalitate conduce la

$$-1 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 1 \quad \text{sau} \quad 0 \leq \frac{x + f(x) - y - f(y)}{x - y},$$

ceea ce este echivalent cu g crescătoare. 3 puncte

Problema 2. a) Determinați toate soluțiile reale ale ecuației $2^x = x + 1$;
b) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(f(x)) = 2^x - 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $f(0) + f(1) = 1$.

Gazeta Matematică

Soluție.

a) Observăm că $x = 0$ și $x = 1$ sunt soluții. 1p

Ecuația $2^x = x + 1$ are cel mult două soluții deoarece grafic acestea reprezintă intersecția graficului unei funcții convexe cu o dreaptă. 2p

b) Din $f(x) = f(y)$ deducem $f(f(x)) = f(f(y))$ deci $2^x = 2^y$. adică $x = y$, prin urmare f este injectivă. 1p

Avem $f(2^x - 1) = 2^{f(x)} - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ 1 punct

Cum $f(0)$ și $f(1)$ sunt soluțiile ecuației $2^t - 1 = t$, avem $f(0), f(1) \in \{0, 1\}$ iar din injectivitatea funcției f avem că $f(0) + f(1) = 1$ 2 puncte

Problema 3. Fie şirul de numere naturale $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_n \leq n$, pentru orice $n \geq 1$ şi

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{\pi a_k}{n} = 0,$$

pentru orice $n \geq 2$.

a) Aflaţi a_2 .

b) Determinaţi termenul general al şirului $(a_n)_n$ în funcţie de $n \in \mathbb{N}^*$

Soluţie.

Evident $a_1 = 1$

Din relaţia $\cos \frac{\pi a_1}{3} + \cos \frac{\pi a_2}{3} = 0$ se obţinem $a_2 = 2$ 2 puncte

Prin inducţie presupunem că $a_k = k, k = \overline{1, n-1}$ şi din ipoteză obţinem

$$\cos \frac{\pi a_n}{n+1} = - \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{\pi k}{n+1}$$

..... 1 punct

Considerăm numărul $z = \cos \frac{\pi}{n+1} + i \sin \frac{\pi}{n+1}$. Avem

$$z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{z - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

..... 1 punct

Deoarece $\bar{z} = \frac{1}{z}$ obţinem că

$$\overline{\left(\frac{1+z}{1-z} \right)} = - \frac{1+z}{1-z},$$

deci $Re \frac{1+z}{1-z} = 0$, adică

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi k}{n+1} = 0.$$

Atunci

$$\cos \frac{\pi a_k}{n+1} = \cos \frac{\pi n}{n+1}.$$

Deoarece $a_n \leq n$ rezultă $a_n = n$ 3 puncte

Observaţie. Se acordă 3 puncte pentru orice modalitate de calcul a sumei $\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{\pi k}{n+1}$.

Problema 4. Fie a şi b două numere raţionale astfel încât numărul complex $z = a + ib$ să aibă modulul 1.

Arătaţi că modulul numărului complex $z_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$ este un număr raţional pentru orice n impar.

Soluţie. Fie $z = \cos t + i \sin t, t \in [0, 2\pi), \sin t, \cos t \in \mathbb{Q}$. Pentru $z = 1$ concluzia este trivială.

Dacă $z \neq 1$ avem

$$|z_n| = |1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}| = \left| \frac{z^n - 1}{z - 1} \right|.$$

.....2 puncte

Pentru $n = 2k + 1 \in \mathbb{N}$ avem

$$\left| \frac{z^n - 1}{z - 1} \right| = \left| \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right|.$$

.....2 puncte

Rămâne să arătăm că $x_k = \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$ este număr rațional.

Avem $x_{k+1} - x_k = 2 \cos(k+1)t$ cu $x_0 = 1 \in \mathbb{Q}$. Cum $\cos(k+1)t = \operatorname{Re} z^{k+1} = \operatorname{Re} (a + ib)^{k+1} \in \mathbb{Q}$, prin inducție rezultă $x_k \in \mathbb{Q}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$3 puncte