OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Arad, 28.05.2011

Clasa a V-a

Problema 1. Într-o familie sunt 3 fraţi care sunt elevi. La sfârşitul fiecărui an şcolar fiecare copil primeşte un număr de cărţi egal cu numărul clasei absolvite. După sfârşitul anului şcolar 2010-2011, cei trei fraţi vor avea împreună 72 de cărţi. Ce clasă va absolvi în anul 2011 fiecare dintre cei trei fraţi? (În fiecare an şcolar cei trei fraţi promovează clasa.)

Soluţie. Fie x, y şi z ultima clasă absolvită de cei trei fraţi. Cei trei fraţi au primit până acum $1+2+...+x$, $1+2+...+y$ respectiv $1+2+...+z$ cărţi. Deoarece $1+2+...+n \in \{1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78\}$ pentru orice $n \in \{1,2,...,12\}$, trebuie să-l scriem pe 72 ca sumă de trei numere din mulţimea $\{1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66\}$.

Găsim variantele: $66+3+3$, $45+21+6$ şi $36+21+15$.

În primul caz, cel mai mare copil va absolvi clasa a XI-a, iar cei doi fraţi mai mici clasa a II-a.

În al doilea caz copiii vor absolvi clasele a IX-a, a VI-a, respectiv a III-a.

În al treilea caz copiii vor absolvi clasele a VIII-a, a VI-a, respectiv a V-a.

Problema 2. Două numere prime se numesc *gemene* dacă diferenţa lor este egală cu 2.

Determinaţi numerele naturale m şi n pentru care $2m^4+3$ şi $2n^4+5$ sunt numere prime gemene.

Soluţie. Dacă $2m^4+3 > 2n^4+5$, adică $2m^4+3 = 2n^4+7$, rezultă $m^4 = n^4+2$. Dacă $u(N)$ este ultima cifră a numărului natural N, atunci $u(N^4) \in \{0,1,5,6\}$, deci $u(m^4) \neq u(n^4+2), \forall m, n \in \mathbb{N}$, ceea ce arată că acest caz este imposibil. Dacă $2m^4+3 < 2n^4+5$, adică $2m^4+5 = 2n^4+5$, rezultă $m = n$. Avem $u(2m^4) \in \{0,2\}$. Dacă $u(2m^4) = 0$, atunci $u(2m^4+5) = 5$ şi, cum $2m^4+5$ e număr prim, rezultă $2m^4+5 = 5$, adică $m = 0$, pentru care se obţine $2m^4+3 = 3$ număr prim. Dacă $u(2m^4) = 2$, atunci $u(2m^4+3) = 5$ şi, cum $2m^4+3$ e număr prim, rezultă $2m^4+3 = 5$, adică $m = 1$, pentru care se obţine $2m^4+5 = 7$ număr prim.

Problema 3. Împărţim mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 19\}$ în două submulţimi nevide M şi N astfel încât:

(i) $M \cap N = \varnothing$ şi $M \cup N = A$;

(ii) suma m a elementelor lui M este mai mare sau egală decât suma n a elementelor lui N;

(iii) pentru orice $x \in M$ avem $x + 10 \in M$ sau $x - 10 \in M$.

Determinaţi cea mai mică valoare pe care o poate lua diferenţa $m - n$.

Soluţie. Deoarece $m + n = 1 + 2 + ... + 19 = 190$, rezultă că $m - n$ este număr par. Dacă $m - n = 0$, rezultă $m = n = 95$.

Mulţimea M este reuniune de mulţimi de forma $\{x, \overline{1x}\}$, având suma pară, deci m este număr par, prin urmare $m \neq 95$, deci $m - n \neq 0$. Un exemplu cu $m - n = 2$ este $M = \{1, 11, 3, 13, 8, 18, 5, 15, 6, 16\}$ şi $N = A \setminus M$.

Problema 4. a) Arătaţi că, oricum am aşeza numerele de la 1 la 10 pe un cerc, există trei numere alăturate cu suma mai mare sau egală cu 18.

b) Daţi exemplu de o aşezare a numerelor de la 1 la 10 pe un cerc, astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie cel mult egală cu 18.

Soluţie. a) Presupunem că suma oricăror trei numere alăturate este cel mult 17. Eliminându-l pe 1, celelalte 9 numere pot fi împărţite în trei grupe de câte trei numere alăturate, fiecare având, conform presupunerii făcute, suma cel mult 17. Ca urmare, suma numerelor de pe cerc este cel mult egală cu $1 + 3 \cdot 17 = 52$, contradicţie cu $1 + 2 + ... + 10 = 55$.

b) O posibilă configuraţie este $1, 10, 6, 2, 9, 5, 4, 8, 3, 7$.