

**Concursul interjudețean de matematică
”Traian Lalescu”, Ediția a XXV-a,
Reșița, 25-27 martie 2011**

Subiecte pentru clasa a IX-a

1. Fie ABC un triunghi, D mijlocul laturii $[BC]$ și E piciorul bisectoarei duse din B . Notăm cu P intersecția segmentelor $[AD]$ și $[BE]$. Demonstrați că P este simetricul lui D față de centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $BC = 4AB$.

2. Fie a un număr real. Demonstrați că dacă ecuația

$$2[x] - 3\{x\} = a$$

are două soluții reale distincte, atunci diferența dintre acestea este $5/3$.

3. Se definește șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ astfel:

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = 2x_n - \sqrt{3x_n^2 + 25} \quad \forall n \in \mathbf{N} .$$

Demonstrați că:

a) Șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este strict descrescător.

b) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ are loc relația

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n .$$

c) Toți termenii șirului $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sunt numere întregi divizibile cu 5.

d) x_n este par dacă și numai dacă n este par.

4. Demonstrați că pentru orice $x, y, z \in (0, \frac{\pi}{2})$ are loc inegalitatea

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z \geq \frac{\sin x}{\cos y} + \frac{\sin y}{\cos z} + \frac{\sin z}{\cos x} .$$

Notă: Timp de lucru - 3 ore