



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 12 Martie 2011

CLASA a XII-a

Problema 1. Arătați că numărul $\frac{1}{\pi} \int_{\sin \frac{\pi}{13}}^{\cos \frac{\pi}{13}} \sqrt{1-x^2} dx$ este rațional.

Problema 2. Fie G mulțimea matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Z}_7, \quad a \neq 0.$$

- (a) Arătați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.
- (b) Arătați că nu există morfisme nenule de la grupul G în grupul aditiv \mathbb{Z}_7 .

Problema 3. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și crescătoare și șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit astfel

$$a_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right),$$

pentru orice $n \geq 1$.

- a) Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.
- b) Știind că există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_p = \int_0^1 f(x) dx$, arătați că f este constantă.

Problema 4. Fie A un inel și a un element al său. Arătați că:

- (a) Dacă A este comutativ și a este nilpotent, atunci $a + x$ este inversabil, oricare ar fi elementul inversabil $x \in A$.
- (b) Dacă A este finit și $a + x$ este inversabil, oricare ar fi elementul inversabil $x \in A$, atunci a este nilpotent.

(Un element a al unui inel se numește *nilpotent*, dacă există un număr întreg $n \geq 1$, astfel încât $a^n = 0$.)

*Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*