



## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 12 Martie 2011

CLASA a XI-a

**Problema 1.** a) Arătați că pentru  $x, y \in \mathbb{R}$  expresia  $\{x + y\} - \{y\}$  poate lua doar valorile  $\{x\}$  sau  $\{x\} - 1$ .

b) Fie  $\alpha$  un număr irațional. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  notăm  $a_n = \{n\alpha\}$  și definim șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  prin

$$x_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \cdots (a_{n+1} - a_n).$$

Arătați că șirul este convergent și determinați limita sa.

*Notă.*  $\{x\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $x$ .

**Problema 2.** Se consideră matricele  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  unde  $n \leq m$ . Se știe că  $\text{rang} AB = n$  și  $(AB)^2 = AB$ .

a) Arătați că  $(BA)^3 = (BA)^2$ .

b) Determinați  $BA$ .

**Problema 3.** Fie  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  două matrice nenule, astfel încât  $AB + BA = O_2$  și  $\det(A + B) = 0$ . Arătați că  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$ .

**Problema 4.** Determinați funcțiile  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică relația

$$|x - y|^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

pentru orice  $x, y \in [0, 1]$ .

*Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.  
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*