



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 12 Martie 2011

CLASA a X-a

Problema 1. Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Arătați că ecuația

$$a^x + b^x = c^x$$

are cel mult o soluție.

Problema 2. a) Arătați că, dacă z_1, z_2, z_3, z_4 sunt numere complexe distincte, cu modulele egale și cu suma nulă, atunci patrulaterul cu vârfurile de afixe z_1, z_2, z_3, z_4 este dreptunghi.

b) Arătați că, dacă numerele reale x, y, z, t îndeplinesc relațiile

$$\sin x + \sin y + \sin z + \sin t = 0 \text{ și } \cos x + \cos y + \cos z + \cos t = 0$$

atunci, pentru orice număr întreg n ,

$$\sin(2n+1)x + \sin(2n+1)y + \sin(2n+1)z + \sin(2n+1)t = 0.$$

Problema 3. Fie a, b două numere complexe. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

A₁) Modulele rădăcinilor complexe ale ecuației $x^2 - ax + b = 0$ sunt respectiv egale cu modulele rădăcinilor ecuației $x^2 - bx + a = 0$.

A₂) $a^3 = b^3$ sau $b = \bar{a}$.

Problema 4. a) Arătați că, dacă $a, b > 1$ sunt numere reale distincte, atunci

$$\log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b).$$

b) Arătați că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1$ sunt numere reale, atunci

$$\log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) + \dots + \log_{a_{n-1}}(\log_{a_{n-1}} a_n) + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) > 0.$$