

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

**Barem de corectare**

**Clasa a XI-a**

**Subiectul 1**

Start ..... 1p

Deduce că

$$2A^2 + 2B^2 - 2A - 2B + I_n = 2(A^2 + B^2 - A - B + \frac{1}{2}I_n) = 2[(A - \frac{1}{2}I_n)^2 + (B - \frac{1}{2}I_n)^2]$$

..... 2p

Scrie

$$2A^2 + 2B^2 - 2A - 2B + I_n = 2[(A - \frac{1}{2}I_n)^2 - i^2(B - \frac{1}{2}I_n)^2] \quad (1)$$

..... 1p

Din (1) și ipoteza  $AB = BA$  deduce că

$$2A^2 + 2B^2 - 2A - 2B + I_n = 2[(A - \frac{1}{2}I_n) - i(B - \frac{1}{2}I_n)][(A - \frac{1}{2}I_n) + i(B - \frac{1}{2}I_n)]$$

..... 2p

Notează  $X = (A - \frac{1}{2}I_n) - i(B - \frac{1}{2}I_n)$  și obține că

$$\bar{X} = (A - \frac{1}{2}I_n) + i(B - \frac{1}{2}I_n)$$

..... 1 p

Deduce că  $2A^2 + 2B^2 - 2A - 2B + I_n = 2X\bar{X}$  ..... 1p

Obține

$$\det(2A^2 + 2B^2 - 2A - 2B + I_n) = 2^n \det(X\bar{X}) \geq 0$$

..... 2p

**Subiectul 2**

Start ..... 1p

Observă că

$$\begin{aligned} (xA + yB)^2 &= x^2A^2 + y^2B^2 + xy(AB + BA) = x^2A^2 + y^2B^2 + xy(A^2 + B^2) \\ &= (x^2 + xy)A^2 + (y^2 + xy)B^2, \quad (\forall) x, y \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (1)$$

..... 2p

Scrie relația Cayley-Hamilton pentru matricea  $xA + yB$ :

$$(xA + yB)^2 - [\text{tr}(xA + yB)](xA + yB) + [\det(xA + yB)] I_2 = O_2.$$

Utilizând relația (1) și faptul că  $\text{tr}(xA + yB) = x \text{tr}(A) + y \text{tr}(B) = 0$ , obține

$$(x^2 + xy)A^2 + (y^2 + xy)B^2 = -[\det(xA + yB)] I_2, \quad (\forall) x, y \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

.....2p

Din relația Cayley-Hamilton pentru matricile  $A$  și  $B$ , obține  $A^2 = -(\det A)I_2$ , și respectiv  $B^2 = -(\det B)I_2$ . Înlocuind în relația (2) obține

$$\det(xA + yB) = (x^2 + xy) \det A + (y^2 + xy) \det B, \quad (\forall) x, y \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

.....2p

Dând valori convenabile pentru  $x, y$  în relația (3), obține relațiile

$$\det(A + B) = 2(\det A + \det B), \quad (4)$$

$$\det(A + \varepsilon B) = (1 + \varepsilon) \det A + (\varepsilon^2 + \varepsilon) \det B, \quad (5)$$

$$\det(A + \varepsilon^2 B) = (1 + \varepsilon^2) \det A + (\varepsilon + \varepsilon^2) \det B. \quad (6)$$

.....1p

Înmulțește relația (5) cu  $2\varepsilon^2$ , o adună la relația (6) înmulțită cu  $2\varepsilon$ , și folosind formulele  $\varepsilon^3 = 1$ ,  $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ , obține

$$2\varepsilon^2 \det(A + \varepsilon B) + 2\varepsilon \det(A + \varepsilon^2 B) = 2(\det A + \det B).$$

.....1p

Folosește relația (4) și finalizează. ....1p

### Subiectul 3

Start .....1p

Prin inducție arată că

$$2 < x_n < \frac{5}{2}, \quad \forall n \geq 3 \quad (1)$$

deci  $(x_n)$  este mărginit. ....2p

Consideră funcția

$$f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

și observă că  $f$  este strict descrescătoare pe  $(0, \infty)$  .....0.5 p

Observă că  $x_{n+1} = f(x_n)$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  și obține că

$$x_{2n+1} = (f \circ f)(x_{2n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \quad (2)$$

și

$$x_{2n+2} = (f \circ f)(x_{2n}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \quad (3)$$

.....1p

Deduce că  $f \circ f$  este strict crescătoare ..... 0.5 p

Calculează

$$x_2 = 3 \quad x_3 = \frac{7}{3} \quad x_4 = \frac{17}{7}$$

.....0.5p

Din  $x_1 < x_3$ , utilizând relația (2) și faptul că  $f \circ f$  este strict crescătoare, deduce că  $(x_{2n-1})$  este strict crescător. Folosește (1) și obține că șirul  $(x_{2n-1})$  este convergent

.....1p

Din  $x_2 > x_4$ , utilizând relația (3) și faptul că  $f \circ f$  este strict crescătoare, deduce că  $(x_{2n})$  este strict descrescător. Folosește (1) și obține că șirul  $(x_{2n})$  este convergent

.....1p

Notează cu  $l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1}$  și cu  $l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$ , trece la limită în relația de recurență și obține

$$l_1 = 2 + \frac{1}{l_2}, \quad l_2 = 2 + \frac{1}{l_1}. \quad (4)$$

.....1p

Din (4) și (1) deduce că  $l_1 = l_2$  ..... 0.75p

Din

$$l = 2 + \frac{1}{l}$$

și (1) deduce că  $l = 1 + \sqrt{2}$ . ..... 0.75p

#### Subiectul 4

Start .....1p

(i) Observă că

$$x_2 = 81, \quad x_3 = 3^{\frac{81}{24}} < 3^4 = 81, \quad x_4 < 3^{\frac{81}{5!}} < 3$$

..... 1.5 p

Prin inducție arată că

$$1 < x_n < 3, \quad \forall n \geq 4. \quad (1)$$

.....1p

Din (1) obține că

$$1 < x_n < 3^{\frac{3}{(n+1)!}}, \quad \forall n \geq 5 \quad (2)$$

.....1p

Din (2) deduce că  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . .....1p

(ii) Obține că

$$x_n^{(n+1)!} = \left( 3^{\frac{x_{n-1}}{(n+1)!}} \right)^{(n+1)!} = 3^{x_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3.$$

..... 1.5p

(iii) Deduce că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)!(x_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)! \left( 3^{\frac{x_{n-1}}{(n+1)!}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^{\frac{x_{n-1}}{(n+1)!}} - 1}{\frac{x_{n-1}}{(n+1)!}} \cdot x_{n-1} \right) \quad (3)$$

..... 1.5p

Folosește faptul că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}}{(n+1)!} = 0$$

și din (3) deduce că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)!(x_n - 1) = (\ln 3) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} \right) = \ln 3.$$

..... 1.5p

**Notă:** La fiecare subiect, o soluție corectă (alta decât cea propusă în barem), va fi punctată cu 10 p.