

Universitatea de Vest din Timișoara
Inspectoratul Școlar Județean Hunedoara

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Enunțuri

Clasa a XI-a

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $AB = BA$. Să se arate că

$$\det(2A^2 + 2B^2 - 2A - 2B + I_n) \geq 0.$$

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietățile $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 0$ și $A^2 + B^2 = AB + BA$. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\varepsilon^3 = 1$. Arătați că

$$\det(A + B) = 2 \left[\varepsilon^2 \det(A + \varepsilon B) + \varepsilon \det(A + \varepsilon^2 B) \right].$$

3. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ dat de

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

și $x_1 = 1$. Studiați convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ și determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

4. Se consideră șirul

$$x_{n+1} = 3^{\frac{x_n}{(n+2)!}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

$$x_1 = 24.$$

(i) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(ii) Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(n+1)!} \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)!(x_n - 1).$$

Timp de lucru: 3 ore