

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"
Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Clasa a IX-a

1. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere naturale definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = 30$ și

$$x_{n+2} = \text{restul împărțirii numărului } (26x_{n+1} + 3x_n) \text{ prin } 2016.$$

Arătați că:

- a) x_n este multiplu de 3 pentru orice $n \geq 2$.
 - b) există două numere naturale nenule k și p astfel încât $x_n = x_{n+p}$ pentru orice $n \geq k$.
 - c) numerele k și p satisfac condițiile: $k \neq 1$, iar p este par.
2. Se consideră expresia $E(u, v, w) = u^4 + v^4 + w^4 - 2u^2v^2 - 2u^2w^2 - 2v^2w^2 + 4uvw(u + v + w)$, un număr real pozitiv $a > 0$ fixat și mulțimea $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid u^2 + v^2 + w^2 = a^2\}$. Determinați numărul $M = \max\{E(u, v, w) \mid (u, v, w) \in A\}$, precum și toate tripletele $(u, v, w) \in A$, pentru care $E(u, v, w) = M$.
3. Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate, I centrul cercului său înscris, O centrul cercului său circumscris, iar $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ și $F \in (AB)$ punctele de contact cu laturile triunghiului ale cercurilor exînscrise.
- a) Arătați că dreptele AD , BE și CF sunt concurente într-un punct N .
 - b) Arătați că

$$(a + b + c)\overline{PN} = (-a + b + c)\overline{PA} + (a - b + c)\overline{PB} + (a + b - c)\overline{PC},$$

pentru orice punct P din planul triunghiului.

- c) Arătați că punctele G , I și N sunt coliniare.
 - d) Determinați distanța dintre punctele O și N .
4. Într-un triunghi ascuțitunghic ABC se consideră picioarele înălțimilor $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ și $C_1 \in AB$. Prin vârfurile triunghiului se duc dreptele l, m, n , astfel încât $A \in l$, $B \in m$, $C \in n$ și $l \perp B_1C_1$, $m \perp C_1A_1$, $n \perp A_1B_1$. Arătați că dreptele l, m, n sunt concurente.

Timp de lucru: 3 ore