

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

**Enunțuri**

**Clasa a VI-a**

**Subiectul 1** În triunghiul  $ABC$ , bisectoarele unghiurilor  $\widehat{A}$  și  $\widehat{C}$  se intersectează într-un punct  $M$  situat pe mediatoarea laturii  $(AC)$ . Știind că  $m(\widehat{AMC}) = 2 \cdot m(\widehat{BAC})$ , aflați măsurile unghiurilor triunghiului  $ABC$ .

**Subiectul 2 a)** Arătați că împărțind un număr prim la 30, restul este întotdeauna fie 1, fie un număr prim.

**b)** Dați exemplu de un număr prim al cărui rest la împărțirea la 60 nu este nici 1, nici număr prim.

**Subiectul 3** Spunem că o mulțime  $A$  de numere naturale este *biconvexă* dacă pentru orice  $x \in A$  cel puțin unul dintre numerele  $x - 1$ ,  $x + 1$  aparține lui  $A$ . Astfel, mulțimea  $A = \{2016, 2017, 2018\}$  este biconvexă deoarece toate elementele sale au vecini în  $A$ :  $2016 + 1 \in A$ ,  $2017 - 1 \in A$ ,  $2018 - 1 \in A$ . În schimb, mulțimea  $B = \{1, 2, 4, 6, 7\}$  nu este biconvexă, deoarece elementul  $4 \in B$  este izolat în  $B$ :  $4 - 1 \notin B$  și  $4 + 1 \notin B$ .

**a)** Câte submulțimi biconvexe de 4 elemente are mulțimea  $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ ?

**b)** Câte submulțimi biconvexe de 18 elemente are mulțimea  $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ ?

**Subiectul 4** Alina și Bogdan joacă următorul joc. La început, pe tablă este scris numărul  $\frac{2015}{2017}$ . O mutare constă din înlocuirea numărului  $\frac{m}{n}$  scris pe tablă

( $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ) cu unul dintre numerele  $\frac{m-1}{n}$  sau  $\frac{m}{n-1}$ . Cei doi jucători mută alternativ. Prima mutare o face Alina. Cine obține primul pe tablă un număr natural, câștigă.

**a)** Arătați că jocul se termină după cel mult 4030 de mutări.

**b)** Demonstrați că, dacă ambii jucători joacă bine, Bogdan poate întotdeauna câștiga. Cum trebuie să joace Bogdan pentru a câștiga?