

**Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"**  
**Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016**

**Clasa a V-a**

1. Fie  $a$ ,  $b$  și  $c$  cifre nenule nu neapărat distincte. Aflați cel mai mic și cel mai mare număr natural  $\overline{abc}$  cu proprietatea că media aritmetică a numerelor  $\overline{abc}$ ,  $\overline{acb}$ ,  $\overline{bac}$ ,  $\overline{bca}$ ,  $\overline{cab}$  și  $\overline{cba}$  are cifra unităților 5.
  
2. Conform legendei șahului, înțeleptul care a inventat jocul de șah i-a cerut împăratului Indiei drept răsplată un bob de grâu pentru primul pătrat al tablei, două pentru al doilea, patru pentru al treilea, ...,  $2^{63}$  pentru ultimul pătrat al tablei. Constatând că hambarele Indiei nu vor avea nici în 100 de ani atât grâu, sfetnicii împăratului l-au rugat pe înțelept să-și schimbe cererea. Acesta a cerut atunci ca în fiecare pătrat al tablei să fie scris un număr natural, iar el să primească atâți elefanți, cât este suma tuturor numerelor scrise pe tablă. Care este numărul minim de elefanți în fiecare din următoarele cazuri:
  - a) dacă toate numerele de pe tablă trebuie să fie diferite?
  - b) dacă pe fiecare linie și pe fiecare coloană a tablei numerele trebuie să fie diferite?
  - c) dacă numerele scrise în oricare două pătrate vecine (două pătrate se consideră vecine dacă au o latură comună) trebuie să fie diferite?
  
3. Spunem că un an este *foarte par* dacă în scrierea sa apar patru cifre și toate aceste cifre sunt pare (spre exemplu, 2000, 2002, 2004, 2006, 2008 sunt foarte pari, iar 2010 nu este foarte par.)
  - a) Determinați cea mai mare distanță posibilă între doi ani foarte pari succesivi și dați exemplu de pereche de ani pentru care această distanță poate fi obținută.
  - b) Este ușor de observat că distanța minimă între doi ani foarte pari succesivi este 2. Care este a doua cea mai mică distanță posibilă între doi ani foarte pari succesivi? Justificați și găsiți un exemplu.
  
4. Alin, Bogdan și Cosmin joacă un turneu de tenis de masă. La fiecare partidă iau parte doi jucători, în timp ce al treilea se odihnește. În partida următoare, cel care s-a odihnit până atunci joacă împotriva câștigătorului (nu există jocuri finalizate cu egalitate). La finalul turneului se constată că Alin a jucat în total 10 partide, Bogdan a jucat 17 și Cosmin 15 partide.
  - a) Câte partide s-au disputat în total?
  - b) Cine a pierdut a doua partidă?

Timp de lucru: 3 ore

Concursul Interjudețean de Matematică Memorialul "Traian Lalescu"

Ediția a XXX-a, Deva, 25 - 27 martie 2016

Barem de corectare

Clasa a V-a

Subiectul 1

Start ..... 1p

$$\frac{\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}}{6} = 37(a + b + c) \dots\dots\dots 3p$$

$37(a + b + c)$  are ultima cifră 5 dacă și numai dacă suma  $a + b + c$  are ultima cifră 5 ..... 1p

Cum  $a, b, c$  sunt cifre nenule, rezultă că  $a + b + c \in \{5, 15, 25\}$  ..... 1p

Cel mai mic număr ce satisface condițiile problemei se obține pentru  $a + b + c = 5$  și este 113 ... 2p

Cel mai mare număr ce satisface condițiile problemei se obține pentru  $a + b + c = 25$  și este 997 2p

Subiectul 2

Start ..... 1p

a) Numărul minim de elefanți se obține dacă pe tablă sunt scrise cele mai mici 64 de numere naturale, astfel că acest număr minim va fi  $0 + 1 + 2 + \dots + 62 + 63 = 2016$  ..... 3p

b) Numărul minim se obține dacă pe fiecare linie și fiecare coloană apar cele mai mici 8 numere naturale 1p

Există o configurație (de ex. restul împărțirii lui  $i + j$  prin 8 pe linia  $i$  și coloana  $j$ ) cu această proprietate 1p

Numărul elefanților va fi  $8 \times (0 + 1 + \dots + 7) = 224$  ..... 1p

c) Numărul minim se obține dacă sunt folosite doar cele mai mici două numere naturale ..... 1p

Există o configurație (de ex. alb = 0, negru = 1) cu această proprietate, ..... 1p

Numărul minim este 32 ..... 1p

Subiectul 3

Start ..... 1p

a) Dacă între anii foarte pari succesivi  $A = \overline{abcd}$  și  $B = \overline{efgh}$  ( $A < B$ ,  $a, b, c, d, e, f, g, h$  cifre pare) există o diferență de ordinul miilor, atunci  $e \geq a + 2$  ..... 1p

Rezultă deci că toți anii dintre  $\overline{(a + 1)000}$  și  $\overline{(a + 1)999}$ , care nu sunt foarte pari, vor fi cuprinși între  $A$  și  $B$  ..... 1p

Cel mai mare an foarte par mai mic decât  $\overline{(a + 1)000}$  este  $\overline{a888}$  și cel mai mic an foarte par mai mare decât  $\overline{(a + 1)999}$  este  $\overline{(a + 2)000}$ . ..... 1p

Cum între  $A$  și  $B$  nu pot exista alți ani foarte pari, rezultă  $A = \overline{a888}$  și  $B = \overline{(a+2)000}$ , deci diferența maximă este 1222 ..... 1p

Găsirea unui exemplu de ani cu proprietatea cerută (e.g. 2888 și 4000) ..... 1p

b) Fie  $A$  un an foarte par. Dacă ultima cifră a lui  $A$  este 0,2,4 sau 6, prin adunarea lui 2 se obține de asemenea un an foarte par. Prin urmare, pentru a găsi ani foarte pari succesivi la distanță mai mare ca 2, cel mai mic dintre ei trebuie să aibă ultima cifră 8 ..... 2p

Dacă ultima cifră a lui  $A$  este 8 și îi adunăm 4, 6, 8 sau 10, vom obține un an care are cifra zecilor impară. Așadar, cea mai mică diferență posibilă mai mare ca 2 este  $\geq 12$  ..... 1p

Găsirea unui exemplu de ani foarte pari succesivi având diferența 12 (e.g. 2008 și 2020) ..... 1p

#### Subiectul 4

Start ..... 1p

a) Numărul partidelor disputate este  $\frac{10 + 15 + 17}{2} = 21$  ..... 3p

b) Niciun jucător nu se poate odihni 2 sau mai multe partide consecutiv, deci numărul partidelor pe care le poate sta deoparte este cel mult 11 ..... 3p

Cum Alin joacă doar 10 partide, rezultă că el a stat deoparte în partidele 1, 3, 5, 7, ..., 19, 21 .. 2p

Deoarece nu participă la a treia partidă, Alin a pierdut-o pe cea de-a doua ..... 1p